

Людмила Ивановна Скрипка

ЗАДАНИЕ №13

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

Рукописный вариант

ЕГЭ-2019

$$\begin{aligned} & \sin x (4 \sin x \cos x - 1) = 0 \\ & \sin x \neq 0 \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + \pi k \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\pi \\ x_2 &= -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{12} \\ x_3 &= -\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{12} \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ответ: а) $\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-\pi; -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; 0$

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание.....	3
§1. Задание №13.1. Замена, квадратное уравнение. Основное тригонометрическое тождество. Формулы двойных углов. Группировка.....	3
Решения.....	4
Задание №13.1. Ответы.	9
Задание №13.1. (ДЗ). Замена, квадратное уравнение. Основное тригонометрическое тождество. Формулы двойных углов. Группировка.....	10
Задание №13.1(ДЗ). Ответы.	11
§2. Задание №13.2. Однородные тригонометрические уравнения. Формулы приведения. Формулы сложения. Условия-ограничения.....	12
Решения.....	13
Задания №13.2. Ответы.	18
Задание №13.2(ДЗ). Однородные тригонометрические уравнения. Формулы приведения. Формулы сложения. Условия-ограничения.....	19
Задание №13.2(ДЗ). Ответы.	20
§3. Задание №13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.....	21
Решения.....	22
Задание №13.3. Ответы.	32
Задание №13.3(ДЗ). Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.	33
Задание №13.3(ДЗ). Ответы.	34
§4. Задание №13.4. Уравнения смешанного типа.	35
Решения.....	36
Задание №13.4. Ответы.	46
Задание №13.4(ДЗ). Уравнения смешанного типа.....	47
Задание №13(ДЗ). Ответы.	48

Задание №13.1. Замена, квадратное уравнение. Основное тригонометрическое тождество. Формулы двойных углов. Группировка.

1) а) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

2) а) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

3) а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. б) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

4) а) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. (ЕГЭ-2014)

5) а) $4 \cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$. б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2012)

6) а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$. б) $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2012)

7) а) $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$. б) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2012)

8) а) $8 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \cos x + 1 = 0$. б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. (ЕГЭ-2015)

9) а) $\sqrt{2} \sin^3 x - \sqrt{2} \sin x + \cos^2 x = 0$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. (ЕГЭ-2012)

10) а) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2016)

13.1. Замена, квадратное уравнение.
 Формулы, двойных углов. Группировка.

1) а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ б) $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

а) Пусть $\sin x = t$, тогда
 $2t^2 + t - 1 = 0$

$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$



$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

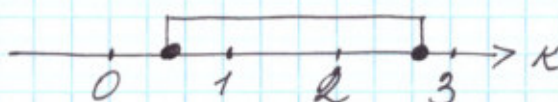
б) $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq 2\pi$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{2k}{3} \leq 2 - \frac{1}{6}$

$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 2} \leq k \leq \frac{11 \cdot 3}{6 \cdot 2}$

$\frac{1}{2} \leq k \leq 2\frac{3}{4}$



$k = 1, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$k = 2, x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$

2) а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$



$x = \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

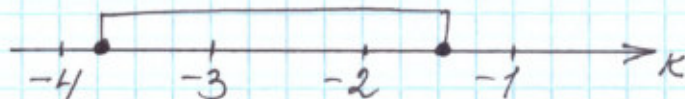
б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

$-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{2\pi k}{3} \leq -\pi$

$-\frac{5}{2} \leq \frac{2k}{3} \leq -1$

$-\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 2} \leq k \leq -\frac{3}{2}$

$-3\frac{3}{4} \leq k \leq -1\frac{1}{2}$



$k = -3, x = \frac{2\pi \cdot (-3)}{3} = -2\pi$

$k = -2, x = \frac{2\pi \cdot (-2)}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

б) $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}$

13.1. Замена квадратное уравнение.
 Формулы двойных углов. Группировка.

3) а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$

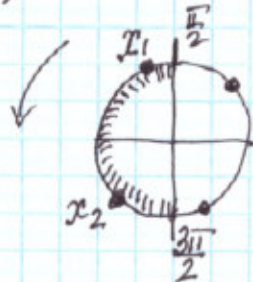
б) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$

$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 2) = 0$

$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -2 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \arctg(-2) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$



$x_1 = \pi - \arctg 2$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k; -\arctg 2 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $\pi - \arctg 2; \frac{5\pi}{4}$

4) а) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$

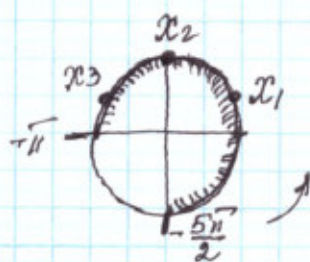
б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ ЕГЭ-2014

а) Пусть $\frac{1}{\sin x} = t$, тогда

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{\sin x} = 1 \\ \frac{1}{\sin x} = 2 \end{cases} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$



$x_1 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

$x_2 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

$x_3 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{4\pi}{6}$

13.1. Замена, квадратное уравнение.
 Формулы двойных углов. Группировка.

5) а) $4 \cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$ б) $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ ЕГЭ-2012

а) $4(1 - \sin^2 x) - 8 \sin x + 1 = 0$

$4 - 4 \sin^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$

$4 \sin^2 x + 8 \sin x - 5 = 0$

$4t^2 + 8t - 5 = 0$

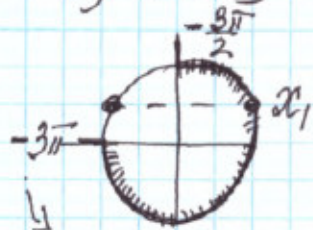
$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$



$x_1 = -3\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{11\pi}{6}$

6) а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$ б) $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$ ЕГЭ-2012

а) $1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{4}$

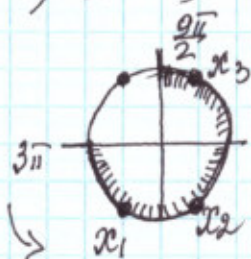
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$



$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$x_2 = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

$x_3 = \frac{11\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

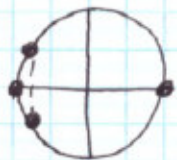
б) $\frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$

13.1. Замена, квадратное уравнение.
Формулы двойных углов. Группировка.

7) а) $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ б) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ ЕГЭ-2012

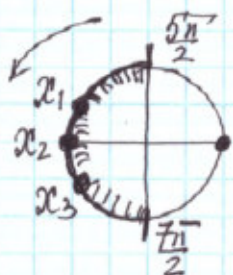
а) $2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$
 $\sin x (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$



$x_1 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{6}$

$x_2 = \frac{17\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} = 3\pi$

$x_3 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$

8) а) $8 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \cos x + 1 = 0$ б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ ЕГЭ-2015

а) $8(1 - \cos^2 x) + 2\sqrt{3} \cos x + 1 = 0$

$8 - 8 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \cos x + 1 = 0$

$8 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x - 9 = 0$. Пусть $\cos x = t, t \in [-1; 1]$

$8t^2 - 2\sqrt{3}t - 9 = 0$

$t = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+72}}{8} = \frac{\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{8}$; $\begin{cases} t = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \notin [-1; 1] \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1] \end{cases}$

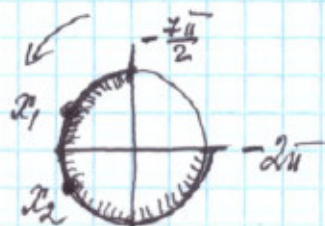
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{19\pi}{6}$

$x_2 = -\frac{19\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6}$



Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$

13.1. Замена, квадратное уравнение.
 Формулы двойных углов. Группировка.

9) а) $\sqrt{2} \cdot \sin^3 x - \sqrt{2} \sin x + \cos^2 x = 0$ б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$ ЕГЭ-2012

а) $\sqrt{2} \sin^3 x - \sqrt{2} \sin x + 1 - \sin^2 x = 0$

$\sqrt{2} \sin x (\sin^2 x - 1) - (\sin^2 x - 1) = 0$

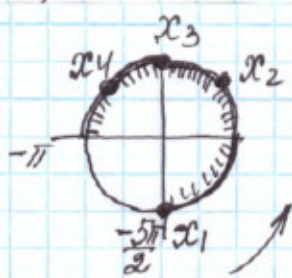
$(\sin^2 x - 1)(\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$

$\begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$



$x_1 = -\frac{5\pi}{2}$

$x_2 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

$x_3 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

$x_4 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$

10) а) $\tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0$ б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$ ЕГЭ-2016

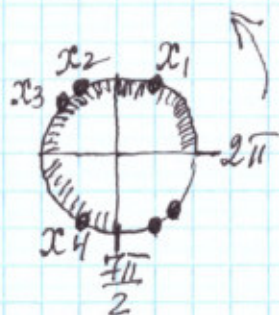
а) $\tan^2 x (\tan x + 1) - 3(\tan x + 1) = 0$

$(\tan^2 x - 3)(\tan x + 1) = 0$

$\begin{cases} \tan x = \pm \sqrt{3} \\ \tan x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$x_2 = \frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$x_3 = 2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

$x_4 = \frac{8\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{10\pi}{3}$

Задание №13.1. Ответы.

1) а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}.$

2) а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } -2\pi, -\frac{4\pi}{3}.$

3) а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad -\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } \pi - \arctg 2, \frac{5\pi}{4}.$

4) а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } -\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}.$

5) а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } -\frac{11\pi}{6}.$

6) а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}.$

7) а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } \frac{17\pi}{6}, 3\pi, \frac{19\pi}{6}.$

8) а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } -\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}.$

9) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } -\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{4}.$

10) а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{б) } \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}, \frac{10\pi}{3}.$

Задание №13.1(ДЗ). Замена, квадратное уравнение. Основное тригонометрическое тождество. Формулы двойных углов. Группировка.

1) а) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

2) а) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

3) а) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. б) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

4) а) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - 2 = 0$. б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

5) а) $2 \sin^2 x + 2 \cos x - \frac{1}{2} = 0$. б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

6) а) $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$. б) $[-3\pi; -2\pi]$.

7) а) $\sqrt{2} \sin 2x = 2 \cos x$. б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

8) а) $\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 3 \cos^2 x = 0$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

9) а) $2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$. б) $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2015)

10) а) $2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x$. б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. (ЕГЭ-2018)

Задание №13.1(ДЗ). Ответы.

1) а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}.$

2) а) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-3\pi, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}.$

3) а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{5\pi}{4}, -\pi + \arctg 3.$

4) а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi.$

5) а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}.$

6) а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{8\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}.$

7) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}.$

8) а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{9\pi}{4}.$

9) а) $\pm\frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}.$

10) а) $\pi k, \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-3\pi, -\frac{13\pi}{6}, -2\pi i.$

Задание №13.2. Однородные тригонометрические уравнения. Формулы приведения. Формулы сложения. Условия-ограничения.

1) а) $6 \sin^2 x + 3 \sin 2x = 4 \cos 2x$. б) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$.

2) а) $6 \sin^2 x + 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 2 = 0$. б) $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2} \right]$. (ЕГЭ-2012)

3) а) $-\sqrt{2} \sin \left(-\frac{5\pi}{2} + x \right) \cdot \sin x = \cos x$. б) $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi \right]$. (ЕГЭ-2013)

4) а) $2 \sin^2 x = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$. (ЕГЭ-2013)

5) а) $\frac{\sin 2x}{\sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)} = \sqrt{2}$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$. (ЕГЭ-2015)

6) а) $\sqrt{6} \cos x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = \sin 2x$. б) $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$. (ЕГЭ-2018)

7) а) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x$. б) $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$. (ЕГЭ-2014)

8) а) $4 \sin^2 x = \operatorname{tg} x$. б) $[-\pi; 0]$. (ЕГЭ-2015)

9) а) $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$.

10) а) $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$. б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$. (ЕГЭ-2018)

13.2. Однородные уравнения. Формулы приведения.
Формулы сложения. Замкнутая-открытая.

1) а) $6 \sin^2 x + 3 \sin 2x = 4 \cos 2x$ б) $[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

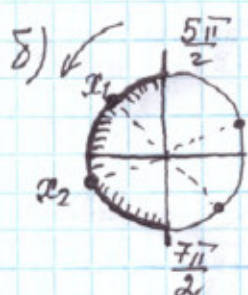
а) $6 \sin^2 x + 3 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 4(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$10 \sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0$

$5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$; $\cos x \neq 0$

$5 \tan^2 x + 3 \tan x - 2 = 0$

$\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{2}{5} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \arctan \frac{2}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



$x_1 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

$x_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2}{5} = 3\pi + \arctan \frac{2}{5}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\arctan \frac{2}{5} + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$
б) $\frac{11\pi}{4}$; $3\pi + \arctan \frac{2}{5}$

2) а) $6 \sin^2 x + 5 \sin(\frac{\pi}{2} - x) - 2 = 0$ б) $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$ ЕГЭ-2012

а) $6(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 2 = 0$

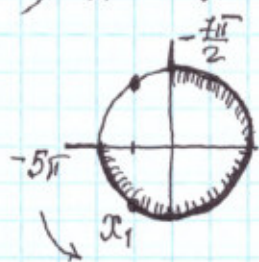
$6 - 6 \cos^2 x + 5 \cos x - 2 = 0$

$6 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$

$\cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12} \begin{cases} \cos x = \frac{4}{3} - \text{нет корней, } \frac{4}{3} \notin [-1; 1] \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$



$x_1 = -5\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{14\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
б) $-\frac{14\pi}{3}$

13.2. Однородные уравнения. Формулы приведения.
Формулы сложения. Условия - ограничения.

3) а) $-\sqrt{2} \sin(-\frac{5\pi}{2} + x) \cdot \sin x = \cos x$ б) $[\frac{9\pi}{2}; 6\pi]$ ЕГЭ-2013

а) $\sqrt{2} \sin(\frac{5\pi}{2} - x) \cdot \sin x - \cos x = 0$

$\sqrt{2} \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$

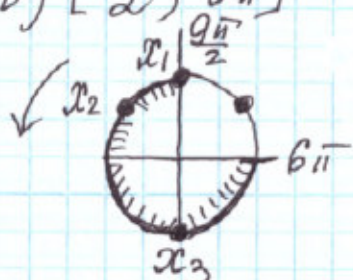
$\cos x (\sqrt{2} \cdot \sin x - 1) = 0$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



б) $[\frac{9\pi}{2}; 6\pi]$



$x_1 = \frac{9\pi}{2}$

$x_2 = \frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{19\pi}{4}$

$x_3 = \frac{9\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{11\pi}{2}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}; \frac{11\pi}{2}$

4) а) $2\sin^2 x = \cos(\frac{3\pi}{2} - x)$ б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$ ЕГЭ-2013

а) $2\sin^2 x = -\sin x$

$2\sin^2 x + \sin x = 0$

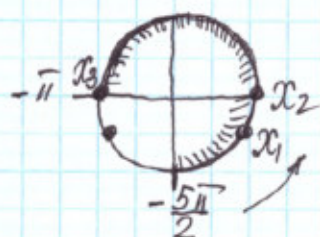
$\sin x (2\sin x + 1) = 0$

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$



$x_1 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{13\pi}{6}$

$x_2 = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -2\pi$

$x_3 = -2\pi + \pi = -\pi$

Ответ: а) $\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{13\pi}{6}; -2\pi; -\pi$

13.2. Однородные уравнения. Формулы приведения. Формулы сложения. Условия - ограничения.

5) а) $\frac{\sin 2x}{\sin(\frac{3\pi}{2}-x)} = \sqrt{2}$ б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$ ЕГЭ-2015

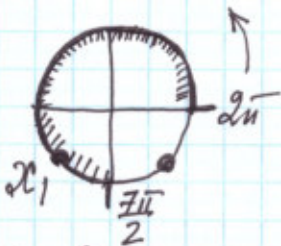
а) $\frac{2\sin x \cdot \cos x}{-\cos x} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$$x_1 = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
б) $\frac{13\pi}{4}$

6) а) $\sqrt{6} \cdot \cos x + 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = \sin 2x$ б) $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$ ЕГЭ-2018

а) $\sqrt{6} \cos x + 2(\sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = \sin 2x$

$$\sqrt{6} \cos x + 2(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x) + \sqrt{3} - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{6} \cos x + \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos x + \cos 2x + 1 = 0$$

$$\sqrt{2} \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

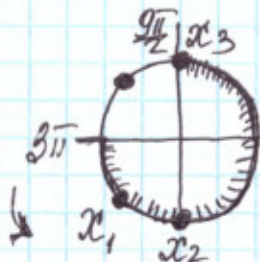
$$\cos x (\sqrt{2} + 2\cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



б) $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$



$$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{13\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$$

$$x_3 = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$

13.2. Однородные уравнения. Формулы приведения. Формулы сокращения. Условия - ограничения.

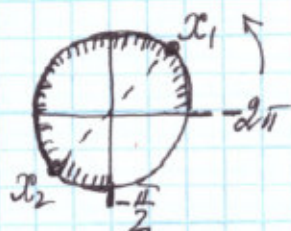
7) а) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x$ б) $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$ ЕГЭ-2014

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 2\cos x (\cos x - \sin x) = 0. \end{cases}$$

$$\cos x - \sin x = 0; \quad 1 - \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$



$$x_1 = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$$

$$x_2 = -\frac{7\pi}{4} + \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$

8) а) $4\sin^2 x = \operatorname{tg} x$ б) $[-\pi; 0]$ ЕГЭ-2015

а) $4\sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 4\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x (4\sin x \cdot \cos x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x = 0 \\ 2\sin 2x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ x = \pi k \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $[-\pi; 0]$

$$x_1 = -\pi$$

$$x_2 = -\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12}$$

$$x_3 = -\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12}$$

$$x_4 = 0$$



Ответ: а) $\pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ б) $-\pi; -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; 0.$

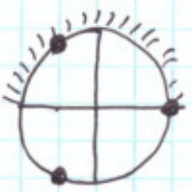
13.2.

Однородные уравнения. Формулы приведения.
Формулы сокращения. Условия — ограничения.

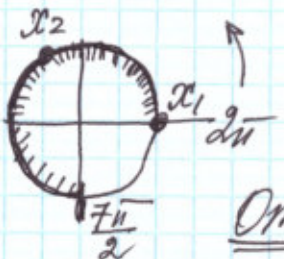
9 а) $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ б) $[2\pi; \frac{4\pi}{2}]$

а) $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos x}{2} \end{cases} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 2(1-\cos^2 x) = 1-\cos x \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 2(1-\cos x)(1+\cos x) - (1-\cos x) = 0 \end{cases} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ (1-\cos x)(2+2\cos x-1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$  $\begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $[2\pi; \frac{4\pi}{2}]$



$x_1 = 2\pi$
 $x_2 = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

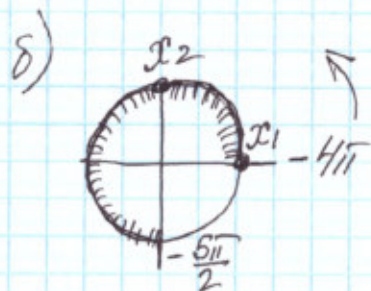
Ответ: а) $2\pi k; 2\pi k + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}$

10 а) $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4\sin^2 \frac{x}{2}$ б) $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ ЕГЭ-2018

а) $\frac{2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4\sin^2 \frac{x}{2} ; \frac{2\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - 4\sin^2 \frac{x}{2} = 0.$

$2\sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{x}{2}} - 2\sin \frac{x}{2} \right) = 0 ; \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1-2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right) = 0.$

$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \begin{cases} \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \begin{cases} x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$



$[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

$x_1 = -4\pi$

$x_2 = -4\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{2}$

Ответ: а) $2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
б) $-4\pi; -\frac{7\pi}{2}$

Задание №13.2. Ответы.

1) а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \arctg \frac{2}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{11\pi}{4}, 3\pi + \arctg \frac{2}{5}.$

2) а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{14\pi}{3}.$

3) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{9\pi}{2}, \frac{19\pi}{4}, \frac{11\pi}{2}.$

4) а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{13\pi}{6}, -2\pi, -\pi.$

5) а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{13\pi}{4}.$

6) а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{13\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}.$

7) а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}.$

8) а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\pi, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, 0.$

9) а) $2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $2\pi, \frac{8\pi}{3}.$

10) а) $2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-4\pi, -\frac{7\pi}{2}.$

Задание №13.2(ДЗ). Однородные тригонометрические уравнения. Формулы приведения. Формулы сложения. Условия-ограничения.

1) а) $4 \sin^2 x + \sin 2x = 3$. б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

2) а) $\cos 2x + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0$. б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. (ЕГЭ-2015)

3) а) $\sin 2x = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. б) $[-3\pi; -2\pi]$. (ЕГЭ-2013)

4) а) $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2013)

5) а) $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}$. б) $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

6) а) $\cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

7) а) $\frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} + \sin 2x = 0$. б) $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

8) а) $2\sqrt{2} \cos^2 x + \operatorname{ctg} x = 0$. б) $[\pi; 2\pi]$.

9) а) $\sin x + \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \cos x)} = 0$. б) $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

10) а) $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 8 \cos^2 \frac{x}{2}$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задание №13.2(ДЗ). Ответы.

1) а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-3\pi - \arctg 3, -\frac{11\pi}{4}.$

2) а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{7\pi}{4}.$

3) а) $\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-3\pi, -\frac{17\pi}{6}, -2\pi.$

4) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}.$

5) а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{23\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}.$

6) а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-4\pi, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}.$

7) а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}.$

8) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{8} + \pi k, -\frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$

9) а) $2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{13\pi}{3}, -4\pi.$

10) а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, 3\pi.$

Задание №13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

1) а) $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7 \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} \right) - 1.$ б) $[-2; 3].$

2) а) $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$ б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}].$ (ЕГЭ-2018)

3) а) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$ б) $\left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5} \right).$ (ЕГЭ-2013)

4) а) $8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$ б) $[\log_2 5; \log_2 11].$ (ЕГЭ-2016)

5) а) $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56.$ б) $[-1; 1].$

6) а) $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$ б) $[2; 3].$ (ЕГЭ-2014)

7) а) $(4^x - 8)^2 - 10|4^x - 8| = 3 \cdot 4^x - 36.$ б) $[2; 3].$

8) а) $1 + \log_3(10x^2 + 1) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3x^4 + 30}.$ б) $\left[-\frac{11}{4}; \frac{2}{3} \right].$ (ЕГЭ-2013)

9) а) $\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4.$ б) $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8 \right].$ (ЕГЭ-2014)

10) а) $6 \log_{27}^2 x + 5 \log_{27} x + 1 = 0.$ б) $\left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5} \right].$

13.9. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

1) а) $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7 \cdot \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} \right) - 1$ б) $[-2; 3]$

а) Пусть $\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = t$, тогда $\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} \right)^2 = t^2$,

$$\frac{(x-1)^2}{16} - 2 \cdot \frac{x-1}{4} \cdot \frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} = t^2$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{4}{(x-1)^2} = t^2 + 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 2(t^2 + 1).$$

Данное уравнение перепишем в виде:

$$2(t^2 + 1) = 7t - 1$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \quad \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = 3 \\ \frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1 - 8 - 12x + 12}{4(x-1)} = 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1 - 8 - 2x + 2}{4(x-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x^2 - 14x + 5 = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x = 7 \pm \sqrt{44} \\ x = -1 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \pm 2\sqrt{11} \\ x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

б) $[-2; 3]$ Оценим числа $7 \pm 2\sqrt{11}$:

$$\begin{array}{l|l|l} 3 < \sqrt{11} < 4 & -4 < -\sqrt{11} < -3 & -1 \in [-2; 3] \\ 6 < 2\sqrt{11} < 8 & -8 < -2\sqrt{11} < -6 & 5 \notin [-2; 3] \\ 13 < 7 + 2\sqrt{11} < 15 & -1 < 7 - 2\sqrt{11} < 1 & \\ 7 + 2\sqrt{11} \notin [-2; 3] & 7 - 2\sqrt{11} \in [-2; 3] & \end{array}$$

Ответ: а) $7 \pm 2\sqrt{11}$; -1 ; 5
б) $7 - 2\sqrt{11}$; -1

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

2) а) $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$ б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$ ЕГЭ-2018

а)
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x^2(x-5) - 4(x-5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ (x-5)(x^2-4) = 0 \end{cases}$$

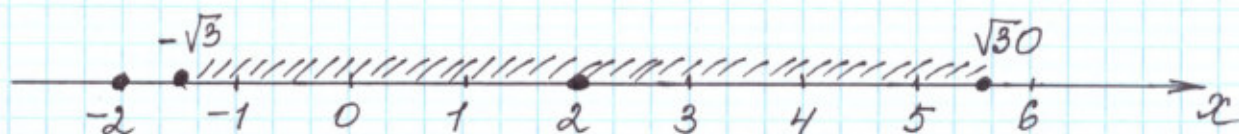
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$

$$1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{3} < -1 \Rightarrow -2 \notin [-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$$

$$5 < \sqrt{30} < 6 \Rightarrow 2 \in [-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$$



Ответ: а) ± 2

б) 2

19.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

3) а) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$ б) $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$ ЕГЭ-2013

а) $9 \cdot 9^x - 18 \cdot 3^x + 5 = 0$

$$3^x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 45}}{9} = \frac{9 \pm 6}{9}$$

$$\begin{cases} 3^x = \frac{5}{3} \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} 3^x = 3^{\log_3 \frac{5}{3}} \\ 3^x = 3^{-1} \end{cases} \begin{cases} x = \log_3 \frac{5}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

б) $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$

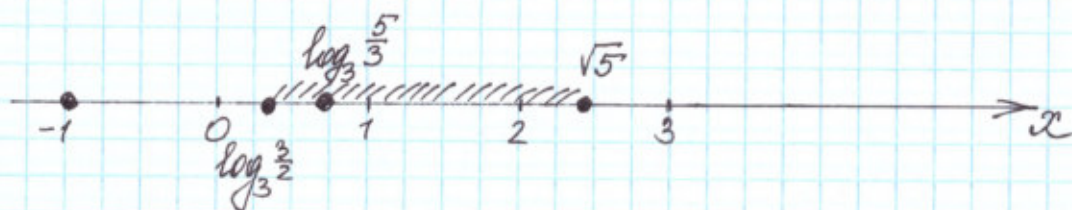
$$\log_3 1 < \log_3 \frac{3}{2} < \log_3 \frac{5}{3} < \log_3 3$$

$$0 < \log_3 \frac{3}{2} < \log_3 \frac{5}{3} < 1$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Значит: $-1 \notin (\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$

$$\log_3 \frac{5}{3} \in (\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$$



Ответ: а) $\log_3 \frac{5}{3}; -1$

б) $\log_3 \frac{5}{3}$

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

4) а) $8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$ б) $[\log_2 5; \log_2 11]$ ЕГЭ-2016

а) $(2^x)^3 - 7 \cdot (2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 112 = 0$

$$(2^x)^2 (2^x - 7) - 16(2^x - 7) = 0$$

$$(2^x - 7)(2^x)^2 - 16 = 0$$

$$(2^x - 7)(2^x - 4)(2^x + 4) = 0$$

$$\begin{cases} 2^x = 7 \\ 2^x = 4 \\ 2^x = -4, \text{ нет решений} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x = 2^{\log_2 7} \\ 2^x = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \log_2 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

б) $[\log_2 5; \log_2 11]$

1) Функция $y = \log_2 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$

и $5 < 7 < 11$, поэтому

$$\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 11, \text{ т.е. } \log_2 7 \in [\log_2 5; \log_2 11]$$

2). $2 = \log_2 4$, $\log_2 4 < \log_2 5$, т.е. $2 \notin [\log_2 5; \log_2 11]$

Ответ: а) $\log_2 7$; 2

б) $\log_2 7$

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

5) а) $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$ б) $[-1; 1]$

а) Пусть $7^{x^2-2x-1} = t$, тогда $7^{x^2-2x} = 7t$.

$$7t + t = 56$$

$$8t = 56$$

$$t = 7$$

$$7^{x^2-2x-1} = 7^1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 1$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+2}$$

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{3}}$$

б) $[-1; 1]$.

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

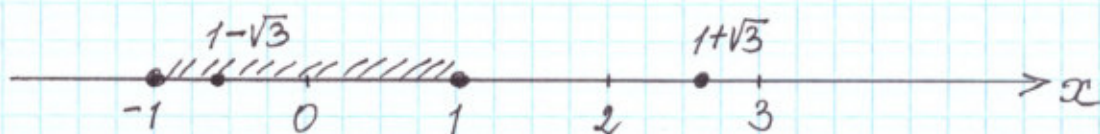
$$2 < 1 + \sqrt{3} < 3$$

$$1 + \sqrt{3} \notin [-1; 1]$$

$$-2 < -\sqrt{3} < -1$$

$$-1 < 1 - \sqrt{3} < 0$$

$$1 - \sqrt{3} \in [-1; 1]$$



Ответ: а) $1 \pm \sqrt{3}$
б) $1 - \sqrt{3}$

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

6) а) $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$ б) $[2; 3]$ ЕГЭ-2014

а) $9^x - 7 \cdot 6^x + 12 \cdot 4^x = 0 \quad | : 4^x, \quad 4^x \neq 0.$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 4} \end{array}\right]$$

$$x = \log_{1,5} 3$$

$$x = \log_{1,5} 4$$

б) $[2; 3]$

Функция $y = \log_{1,5} t$ возрастает на $(0; +\infty)$

$$\frac{9}{4} < 3 < \frac{27}{8} < 4$$

$$\log_{1,5} \frac{9}{4} < \log_{1,5} 3 < \log_{1,5} \frac{27}{8} < \log_{1,5} 4$$

$$2 < \log_{1,5} 3 < 3 < \log_{1,5} 4$$

значит: $\log_{1,5} 3 \in [2; 3]$

$$\log_{1,5} 4 \notin [2; 3]$$

Ответ: а) $\log_{1,5} 3; \log_{1,5} 4$

б) $\log_{1,5} 3$

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

7) а) $(4^x - 8)^2 - 10|4^x - 8| = 3 \cdot 4^x - 36$ б) $[2; 3]$

а) $(4^x - 8)^2 - 10|4^x - 8| = 3 \cdot (4^x - 8) - 12$

Пусть $4^x - 8 = t$, тогда
 $t^2 - 10|t| - 3t + 12 = 0$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 10t - 3t + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 13t + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = 12 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < 0 \\ t^2 + 10t - 3t + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t < 0 \\ t^2 + 7t + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t < 0 \\ \begin{cases} t = -3 \\ t = -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t = 1 \\ t = 12 \\ t = -3 \\ t = -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4^x - 8 = 1 \\ 4^x - 8 = 12 \\ 4^x - 8 = -3 \\ 4^x - 8 = -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4^x = 9 \\ 4^x = 20 \\ 4^x = 5 \\ 4^x = 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \log_4 9 \\ x = \log_4 20 \\ x = \log_4 5 \\ x = 1 \end{matrix}$$

б) $[2; 3]$

Функция $y = \log_4 x$ возрастающая на $(0; +\infty)$

$$4 < 5 < 9 < 16 < 20 < 64$$

$$\log_4 4 < \log_4 5 < \log_4 9 < \log_4 16 < \log_4 20 < \log_4 64$$

$$1 < \log_4 5 < \log_4 9 < 2 < \log_4 20 < 3$$

Поэтому $1 \notin [2; 3]$

$$\log_4 20 \in [2; 3]$$

$$\log_4 5 \notin [2; 3]$$

$$\log_4 9 \notin [2; 3]$$

Ответ: а) $1; \log_4 5; \log_4 9; \log_4 20$

б) $\log_4 20$

13.9. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

8) а) $1 + \log_3(10x^2 + 1) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3x^4 + 30}$ б) $[-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$ ЕГЭ-2013

а) Заметим, что $10x^2 + 1 > 0$ и $3x^4 + 30 > 0$ при любых действительных значениях x .

$$\log_3 3 + \log_3(10x^2 + 1) = \log_3(3x^4 + 30)$$

$$\log_3(30x^2 + 3) = \log_3(3x^4 + 30)$$

$$30x^2 + 3 = 3x^4 + 30$$

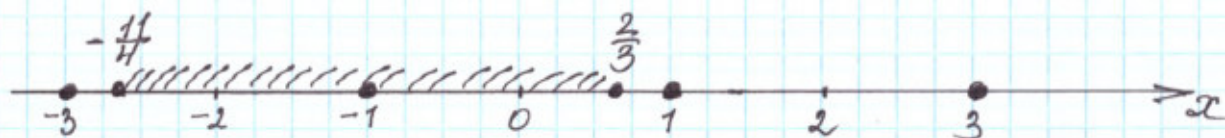
$$3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

б) $[-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$

$[-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$



$$-3 \notin [-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$$

$$-1 \in [-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$$

$$1 \notin [-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$$

$$3 \notin [-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}]$$

Ответ: а) $\pm 1; \pm 3$
б) -1

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

9 а) $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$ б) $[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$ ЕГЭ-2014

а) $\log_5(2-x) = \log_{5^2}(x^2)^2$

$\log_5(2-x) = \log_5 x^2$

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \begin{cases} x < 2 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \begin{cases} x < 2 \\ \begin{bmatrix} x = -2 \\ x = 1 \end{bmatrix} \end{cases} \begin{bmatrix} x = -2 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

б) $[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$

Функция $y = \log_9 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$

$$\frac{1}{82} < \frac{1}{81} < 8 < 9$$

$$\log_9 \frac{1}{82} < \log_9 \frac{1}{81} < \log_9 8 < \log_9 9$$

$$\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1$$

Поэтому: $-2 \in [\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$

$$1 \notin [\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$$

Ответ: а) $-2; 1$

б) -2

13.3. Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

10) а) $6\log_{27}^2 x + 5\log_{27} x + 1 = 0$ б) $[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$

а) Пусть $\log_{27} x = t$, тогда

$$6t^2 + 5t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12} \quad \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{27} x = -\frac{1}{2} \\ \log_{27} x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 27^{-\frac{1}{2}} \\ x = 27^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{27}} \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{9} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

б) $[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$

Сравним: $\frac{\sqrt{3}}{9} \vee \frac{1}{5}$

$$5\sqrt{3} \vee 9$$

$$\sqrt{75} \vee \sqrt{81}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} \notin [\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$$

Сравним: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{3} \in [\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{1}{3}$

б) $\frac{1}{3}$

Задание №13.3. Ответы.

1) а) $-1, 5, 7 \pm 2\sqrt{11}$. б) $-1, 7 - 2\sqrt{11}$.

2) а) $-2; 2$. б) 2 .

3) а) $-1; \log_3 \frac{5}{3}$. б) $\log_3 \frac{5}{3}$.

4) а) $2; \log_2 7$. б) $\log_2 7$.

5) а) $1 \pm \sqrt{3}$. б) $1 - \sqrt{3}$.

6) а) $\log_{\frac{3}{2}} 3; \log_{\frac{3}{2}} 4$. б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

7) а) $1; \log_4 5; \log_4 9; \log_4 20$. б) $\log_4 20$.

8) а) $\pm 1; \pm 3$. б) -1 .

9) а) $-2; 1$. б) -2 .

10) а) $\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{1}{3}$. б) $\frac{1}{3}$.

Задание №13.3(ДЗ). Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения.

1) а) $2 \left(\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2} \right) = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} + 16.$ б) $[3; 8].$

2) а) $x + \sqrt{x^3 + 4x^2 - x - 3} = 0.$ б) $[\log_2 0, 1; \log_2 0, 3].$

3) а) $25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0.$ б) $\left(2; \frac{8}{3} \right).$ (ЕГЭ-2013)

4) а) $125^x - 5^{2x+1} - 4 \cdot 5^x + 20 = 0.$ б) $[0, 5; 1, 5].$

5) а) $5^{x^2-4x+1} + 5^{x^2-4x} = 30.$ б) $[-1; 3].$

6) а) $49^{x+1} - 200 \cdot 14^x + 4^{x+2} = 0.$ б) $[-5; 1].$

7) а) $(3^x - 6)^2 - 16|3^x - 6| = 15 - 2 \cdot 3^{x+1}.$ б) $[1; 2].$

8) а) $\log_{36}(x^4 + 5)^2 = 1 + \log_6 x^2.$ б) $\left[-\frac{4}{3}; \frac{7}{3} \right].$

9) а) $\log_3(x^2 - x) = \log_9(x^2 + 6x + 9).$ б) $[\log_3 0, 3; \log_3 25].$

10) а) $\log_3^2 x + 2 \log_3 x^2 + 3 = 0.$ б) $[0, 04; 0, 4].$

Задание №13.3(ДЗ). Ответы.

1) а) $-3, 4, 4 \pm \sqrt{14}$. б) $4; 4 + \sqrt{14}$.

2) а) $-3; -1$. б) -3 .

3) а) $2; \log_5 35$. б) $\log_5 35$.

4) а) $\log_5 2; 1$. б) 1 .

5) а) $2 \pm \sqrt{5}$. б) $2 - \sqrt{5}$.

6) а) $-2, \log_{\frac{7}{2}} 4$. б) -2 .

7) а) $\log_3 5; 2; \log_3 13$. б) $\log_3 5; 2$.

8) а) $\pm 1; \pm \sqrt{5}$. б) $-1, 1, \sqrt{5}$.

9) а) $-1; 3$. б) -1 .

10) а) $\frac{1}{27}; \frac{1}{3}$. б) $\frac{1}{3}$.

Задание №13.4. Уравнения смешанного типа.

1) а) $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$. б) $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2013)

2) а) $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$. б) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2013)

3) а) $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$. б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. (ЕГЭ-2014)

4) а) $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$. б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. (ЕГЭ-2017)

5) а) $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$. б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. (ЕГЭ-2017)

6) а) $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2012)

7) а) $(2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3) \log_2(\sqrt{2} \cos x) = 0$. б) $[-5\pi; -3\pi]$.

8) а) $2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0$. б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. (ЕГЭ-2016)

9) а) $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$. б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

10) а) $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0$. б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13.4. Уравнения смешанного типа.

1) а) $15 \cos x = 3 \cos x \cdot 5 \sin x$

б) $[5\pi; \frac{13\pi}{2}]$

ЕГЭ-2013

а) $5 \cos x \cdot 3 \cos x - 3 \cos x \cdot 5 \sin x = 0$

$3 \cos x \cdot (5 \cos x - 5 \sin x) = 0$

$\begin{cases} 3 \cos x = 0 & - \text{нет решений} \\ 5 \cos x = 5 \sin x \end{cases}$

$\cos x = \sin x$

$\operatorname{tg} x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $[5\pi; \frac{13\pi}{2}]$

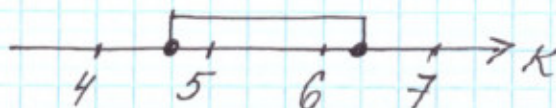
$5\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{13\pi}{2}$

$5 \leq \frac{1}{4} + k \leq \frac{13}{2}$

$5 - \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{13}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{19}{4} \leq k \leq \frac{25}{4}$

$4\frac{3}{4} \leq k \leq 6\frac{1}{4}$



$k = 5, x = \frac{\pi}{4} + 5\pi = \frac{21\pi}{4}$

$k = 6, x = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

2) а) $(27 \cos x)^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$ б) $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ ЕГЭ-2013

а) $3^{3 \sin x \cdot \cos x} = 3^{1,5 \cos x}$

$$3 \sin x \cdot \cos x = 1,5 \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

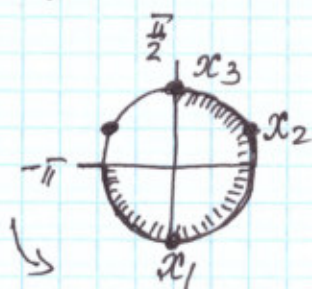
$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



б) $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$



$$x_1 = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = -\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

3) а) $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$ б) $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$ ЕГЭ-2014

а) Пусть $9^{\sin x} = t$, где $t > 0$, тогда

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$$

$$3t^2 + 3 = 10t$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3}$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9^{\sin x} = 3 \\ 9^{\sin x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{2\sin x} = 3^1 \\ 3^{2\sin x} = 3^{-1} \end{cases}$$

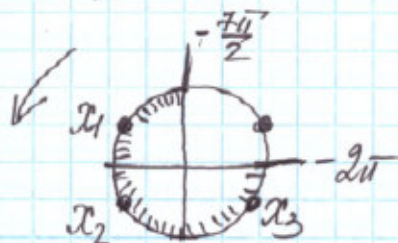
$$\begin{cases} 2\sin x = 1 \\ 2\sin x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$



$$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{19\pi}{6}$$

$$x_2 = -\frac{19\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{17\pi}{6}$$

$$x_3 = -\frac{17\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{13\pi}{6}$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

4) а) $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$ б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ ЕГЭ-2017

а) Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда
 $9t^2 - 28t + 3 = 0$

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 27}}{9} = \frac{14 \pm 13}{9} \quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 9^{\cos x} = 3 \\ 9^{\cos x} = \frac{1}{9} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 3^{2\cos x} = 3^1 \\ 3^{2\cos x} = 3^{-2} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 2\cos x = 1 \\ 2\cos x = -2 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{array} \right.$$



$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \leq 4\pi$$

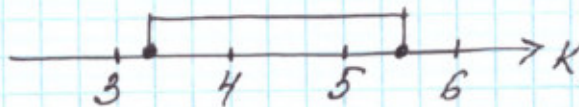
$$\frac{5}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{2k}{3} \leq 4 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{13}{6} \leq \frac{2k}{3} \leq \frac{11}{3}$$

$$\frac{13 \cdot 3}{6 \cdot 2} \leq k \leq \frac{11 \cdot 3}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{13}{4} \leq k \leq \frac{11}{2}$$

$$3\frac{1}{4} \leq k \leq 5\frac{1}{2}$$



$$k = 4, \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$$

$$k = 5, \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

5) а) $2x \cdot \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$ б) $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ ЕРЭ-2017

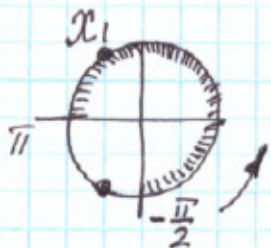
а) $2 \cos x (x - 4) + (x - 4) = 0$

$(x - 4)(2 \cos x + 1) = 0$

$\begin{cases} x = 4 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$

$4 > \pi \Rightarrow 4 \notin [-\frac{\pi}{2}; \pi]$



$x_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Ответ: а) $4; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{2\pi}{3}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

6) а) $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$ б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$ ЕГЭ-2012

а) $\cos x - 2\sin x \cos x + 25 = 25$

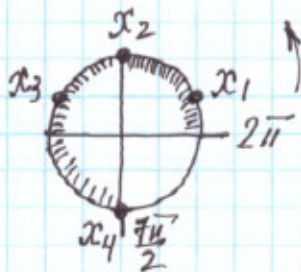
$$\cos x (1 - 2\sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{7\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

7) а) $(2\cos^2 x + 3\sin x - 3) \cdot \log_2(\sqrt{2}\cos x) = 0$ б) $[-5\pi; -3\pi]$

а) $\begin{cases} 2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ или $\log_2(\sqrt{2}\cos x) = 0$

$\begin{cases} 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$



$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{2}\cos x = 1$
 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Объединим полученные решения: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) $[-5\pi; -3\pi]$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$-5\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq -3\pi$

$-5 - \frac{1}{6} \leq 2k \leq -3 - \frac{1}{6}$

$-\frac{31}{6} \leq 2k \leq -\frac{19}{6}$

$-2\frac{7}{12} \leq k \leq -1\frac{7}{12}$



$k = -2; x = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}$

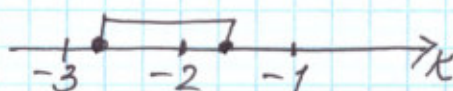
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$-5\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -3\pi$

$-5 - \frac{1}{4} \leq 2k \leq -3 - \frac{1}{4}$

$-\frac{21}{4} \leq 2k \leq -\frac{13}{4}$

$-2\frac{5}{8} \leq k \leq -1\frac{5}{8}$



$k = -2; x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{15\pi}{4}$

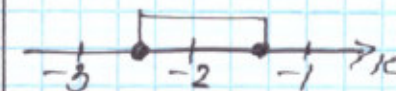
$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$-5\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -3\pi$

$-5 + \frac{1}{4} \leq 2k \leq -3 + \frac{1}{4}$

$-\frac{19}{4} \leq 2k \leq -\frac{11}{4}$

$-2\frac{3}{8} \leq k \leq -1\frac{3}{8}$



$k = -2; x = -\frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{17\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{23\pi}{6}; -\frac{15\pi}{4}; -\frac{17\pi}{4}$

13.4. Уравнения смешанного типа.

8 а) $2 \log_2 (2 \sin x) - 7 \log_2 (2 \sin x) + 3 = 0$ б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ ЕГЭ-2016

а) Пусть $\log_2 (2 \sin x) = t$, тогда

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

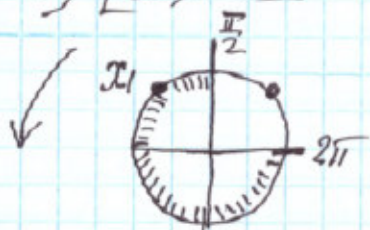
$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 (2 \sin x) = \frac{1}{2} \\ \log_2 (2 \sin x) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \sin x = \sqrt{2} \\ 2 \sin x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4 \end{cases}$$

- не решение
т.к. $4 \notin [-1; 1]$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$



$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{4}$

13.4. Уравнение синусамного типа.

9) а) $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$

б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

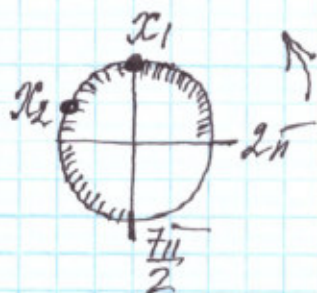
а) $\begin{cases} \log_2(\sin x) \cdot (\log_2(\sin x) + 1) = 0 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_2(\sin x) = 0 \\ \log_2(\sin x) = -1 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{6}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

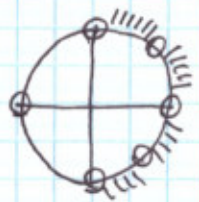
б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$

13.4.

Уравнения смешанного типа.

10 а) $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot \log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0$ б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

а) 1. ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 2\sin^2 x > 0 \\ \sqrt{2} \cos x > 0 \\ \sqrt{2} \cos x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



2. $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot \log_{13}(2\sin^2 x) = 0$

$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ 2\sin^2 x = 1 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

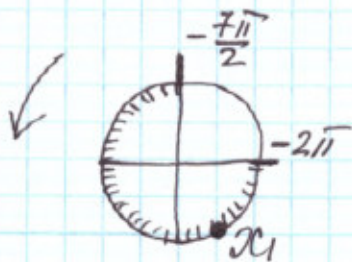


3. С учетом ОДЗ получим:



$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{7\pi}{3}$

Задание №13.4. Ответы.

1) а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

2) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

3) а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.

4) а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi, \frac{11\pi}{3}$.

5) а) $4; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{2\pi}{3}$.

6) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

7) а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{17\pi}{4}, -\frac{23\pi}{6}, -\frac{15\pi}{4}$.

8) а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{3\pi}{4}$.

9) а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$.

10) а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{7\pi}{3}$.

Задание №13.4(ДЗ). Уравнения смешанного типа.

1) а) $2^{1-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$. б) $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. (ЕГЭ-2013)

2) а) $(25^{\sin x})^{-\cos x} = 5^{\sqrt{2}\sin x}$. б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. (ЕГЭ-2013)

3) а) $4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}$. б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2014)

4) а) $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$. б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5) а) $x \operatorname{tg} x - 7 \operatorname{tg} x + x = 7$. б) $[2\pi; 3\pi]$.

6) а) $\log_8 (7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0$. б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. (ЕГЭ-2017)

7) а) $(6 \sin^2 x + 11 \cos x - 10) \log_{\pi}(\sin x) = 0$. б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

8) а) $2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0$. б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. (ЕГЭ-2016)

9) а) $\frac{\log_3^2(\operatorname{tg}^2 x) - 2 \log_3(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{2 \cos x + 1}} = 0$. б) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

10) а) $\frac{(2^{\cos x} - \sqrt{2}) \log_7(3 \operatorname{tg}^2 x)}{\log_{17}(2 \sin x)} = 0$. б) $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Задание №13.4(ДЗ). Ответы.

1) а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$.

2) а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $2\pi, \frac{11\pi}{4}, 3\pi$.

3) а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{8\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

4) а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

5) а) $7; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. б) $7; \frac{11\pi}{4}$.

6) а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$.

7) а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}$.

8) а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

9) а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

10) а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{13\pi}{3}$.

