

Людмила Ивановна Скрипка

ЗАДАНИЕ №14

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

Рукописный вариант



СОДЕРЖАНИЕ

§1.Задание №14.1. Кубы	3
Решения.....	5
Задание №14.1 Ответы	12
Задание №14.1(ДЗ). Кубы.....	13
Задание №14.1(ДЗ). Ответы	14
§2. Задание №14.2. Четырехугольные призмы.....	15
Решения.....	16
Задание №14.2. Ответы	23
Задание №14.2(ДЗ). Четырехугольная призма	24
Задание №14.2(ДЗ). Ответы	24
§3. Задание №14.3. Треугольные призмы	26
Решения.....	27
Задание №14.3. Ответы	37
Задание №14.3(ДЗ). Треугольные призмы.....	38
Задание №14.3(ДЗ). Ответы	38
§4. Задание №14.4. Четырехугольные пирамиды	40
Решения.....	41
Задание №14.4 Ответы	51
Задание №14.4(ДЗ). Четырехугольные пирамиды	52
Задание №14.4(ДЗ). Ответы.	53
§5. Задание №14.5. Треугольные пирамиды пирамиды	54
Решения.....	55
Задание №14.5. Ответы	63
Задание №14.5(ДЗ). Треугольные пирамиды пирамиды	64
Задание №14.5(ДЗ). Ответы	64
§6. адание №14.6. Тела вращения.....	66
Решения.....	66
Задание №14.6. Ответы	73
Задание №14.6(ДЗ). Тела вращения	73
Задание №14.6(ДЗ). Ответы	75

Задание №14.1. Кубы.

1) (ЕГЭ-2018)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90° .
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1 .

2) (ЕГЭ-2017)

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
- б) Найдите длину отрезка AP .

3) (ЕГЭ-2016)

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

4) (ЕГЭ-2015)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

5) (ЕГЭ-2015)

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 4. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 3$. Плоскость α проходит через точки C_1 и K , параллельна прямой BD_1 и пересекает ребро $A_1 B_1$ в точке P .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости $BB_1 C$.

14.1. Кув
1) ЕПЗ-2018

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

a) АОК-мб: $(AC; \hat{BA}_1) = 90^\circ$

$AD_1 \perp (ABC)$, KO - наклонная к (ABC)

то теореме о трёх перпендикулярах $AC \perp OK$ означает и $AC \perp BD_1$, $(AC; BD_1) = 90^\circ$.

$$p(AC; BD_1) = p(O; BD_1) = OH, \text{ где } OH \perp BD_1.$$

$$OP = \frac{1}{2} AD_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

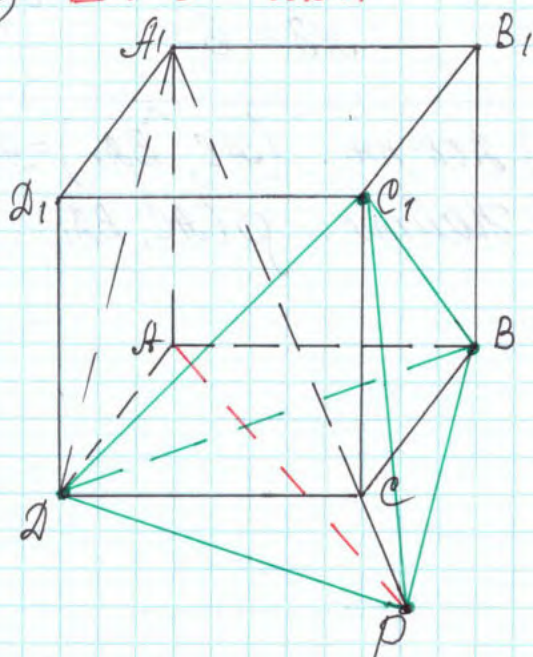
$$S_{BOP} = \frac{OB \cdot OP}{2} = \frac{BP \cdot OH}{2}; \quad OH = \frac{OB \cdot OP}{BP}$$

$$OH = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}. \quad \rho(AC; BD_1) = \sqrt{6}.$$

Ombem: 8) $\sqrt{6}$

14.1. Куб

2) ЕГЭ - 2017

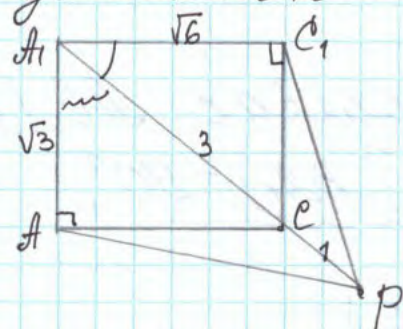


Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $A_1 C = 3$
 $P \in \text{мкху } A_1 C$
 $A_1 P = \sqrt{4}$

- а) Док-ть: PBC_1 - правильный тетраэдр
 б) Найти: AP

а) $A_1 C = 3, A_1 P = 4 \Rightarrow CP = 1$.

Пусть $AB = a$, тогда $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 3$; $a^2 = 3, a = \sqrt{3}$.
 $\triangle BDC_1$ - правильный, т.к. стороны его являются диагоналями квадратов: $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.



$\triangle A_1 C_1 C$: $A_1 C_1 = \sqrt{6}$; $A_1 C = 3$, $\angle A_1 C_1 C = 90^\circ$

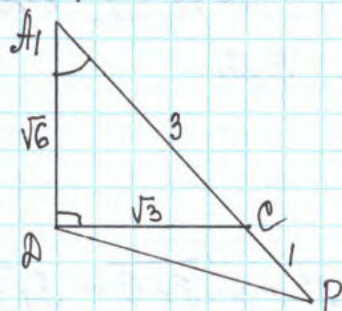
$\cos \angle C_1 A_1 C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\triangle A_1 C_1 P$: $A_1 C_1 = \sqrt{6}$; $A_1 P = 4$, $\cos \angle C_1 A_1 P = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$PC_1 = \sqrt{A_1 C_1^2 + A_1 P^2 - 2 \cdot A_1 C_1 \cdot A_1 P \cdot \cos \angle C_1 A_1 P}$

(по теореме косинусов).

$PC_1 = \sqrt{6 + 16 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{22 - 16} = \sqrt{6}$. $PC_1 = \sqrt{6}$



$\triangle A_1 AC$: $\cos \angle CAA_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\triangle A_1 AP$: $PA = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{6}$. $PA = \sqrt{6}$.

$PB = PA = \sqrt{6}$ (т.к. куб симметричен относительно пл-ти (AA_1C))

Получили PBC_1 - правильный тетраэдр, т.к. все его стороны равны $\sqrt{6}$.

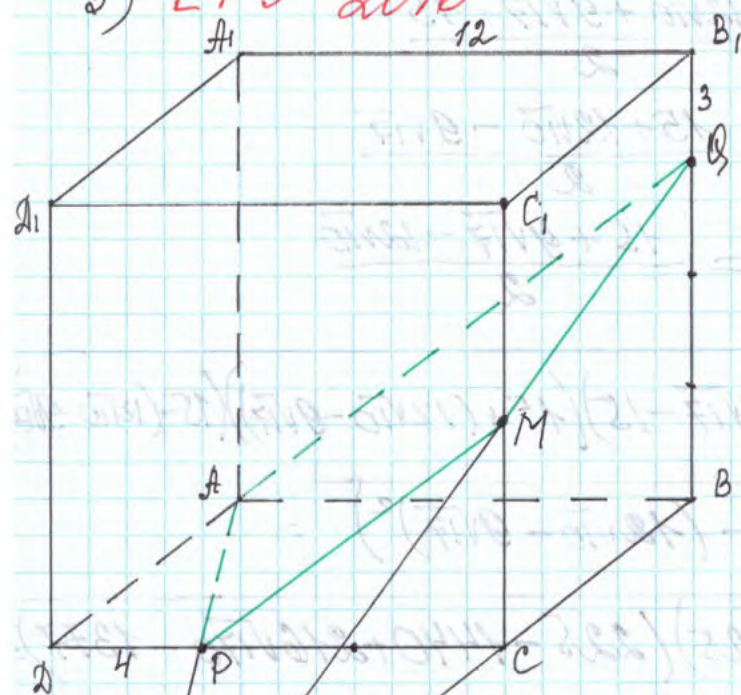
б) $\triangle A_1 AC$: $\cos \angle CAA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle A_1 AP$: $AP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3 + 16 - 8} = \sqrt{11}$. $AP = \sqrt{11}$

Ответ: б) $\sqrt{11}$

14.1. Куб

3) ЕГЭ-2016



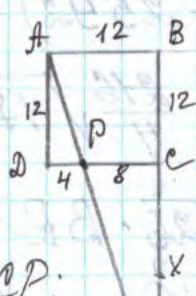
Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $AB = 12$
 $P \in AD, AP = 4$
 $Q \in BB_1, B_1 Q = 3$
 $(APQ) \cap CC_1 = M$

а) Док-ть: M - середина CC_1
 б) Найти: $\rho(C; (APQ))$

I способ

а) Строим сечение:
 AB ; $AP \cap BC = K$; $KQ \cap CC_1 = M$
 PM ; MQ .

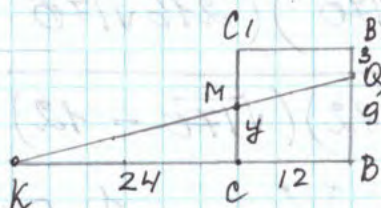
$APMQ$ - искомое сечение куба плоскостью (APQ)



$$CK = x$$

$$\triangle KBA \sim \triangle KCP:$$

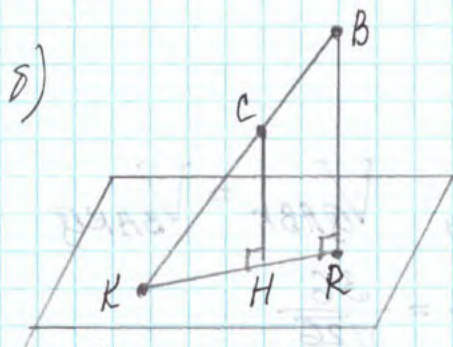
$$\frac{12}{8} = \frac{12+x}{x} \Rightarrow x = 24$$



$$\triangle KBQ \sim \triangle KCM:$$

$$\frac{9}{y} = \frac{12+24}{24} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow CM = MC_1$$

M - середина CC_1



$CH \perp (APQ)$, $CH = \rho(C; (APQ))$ - искомое расстояние.

$BR \perp (APQ)$.

$$\frac{CH}{BR} = \frac{CK}{BR} \Rightarrow CH = \frac{CK \cdot BR}{BR}$$

Рассмотрим пирамиду $BAKQ$, B - вершина, $\triangle AKQ$ - основание, BR - высота

$$V_{BAKQ} = \frac{1}{3} S_{AKQ} \cdot BR$$

$$AQ = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

$$AK = \sqrt{12^2 + 36^2} = \sqrt{144 + 1296} = \sqrt{1440} = 12\sqrt{10}$$

$$KQ = \sqrt{9^2 + 36^2} = \sqrt{81 + 1296} = \sqrt{1377} = 9\sqrt{17}$$

$$p = \frac{15 + 12\sqrt{10} + 9\sqrt{17}}{2}$$

$$p-a = \frac{15 + 12\sqrt{10} + 9\sqrt{17}}{2} - 15 = \frac{12\sqrt{10} + 9\sqrt{17} - 15}{2}$$

$$p-b = \frac{15 + 12\sqrt{10} + 9\sqrt{17}}{2} - 9\sqrt{17} = \frac{15 + 12\sqrt{10} - 9\sqrt{17}}{2}$$

$$p-c = \frac{15 + 12\sqrt{10} + 9\sqrt{17}}{2} - 12\sqrt{10} = \frac{15 + 9\sqrt{17} - 12\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{AKQ} &= \frac{1}{4} \sqrt{(12\sqrt{10} + 9\sqrt{17} + 15)(12\sqrt{10} + 9\sqrt{17} - 15)(15 + (12\sqrt{10} - 9\sqrt{17}))(15 - (12\sqrt{10} - 9\sqrt{17}))} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{((12\sqrt{10} + 9\sqrt{17})^2 - 225)(225 - (12\sqrt{10} - 9\sqrt{17})^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(1440 + 216\sqrt{170} + 1377 - 225)(225 - 1440 + 216\sqrt{170} - 1377)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2592 + 216\sqrt{170})(216\sqrt{170} - 2592)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{216^2(\sqrt{170} + 12)(\sqrt{170} - 12)} = \frac{216}{4} \sqrt{170 - 144} = \\ &= 54 \cdot \sqrt{26}. \quad V_{BAKQ} = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{26} \cdot BR = 18\sqrt{26} \cdot BR. \end{aligned}$$

Эта же пирамида BAKQ равна пирамиде QABK, в которой Q-вершина, $\triangle ABK$ -основание, QK-высота.

$$S_{ABK} = \frac{AB \cdot BK}{2} = \frac{12 \cdot 36}{2} = 216; \quad BQ = 9.$$

$$V_{QABK} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABK} \cdot BQ = \frac{1}{3} \cdot 216 \cdot 9 = 648; \quad V_{QABK} = V_{BAKQ}$$

$$18\sqrt{26} \cdot BR = 648 \Rightarrow BR = \frac{648}{18\sqrt{26}} = \frac{36}{\sqrt{26}}$$

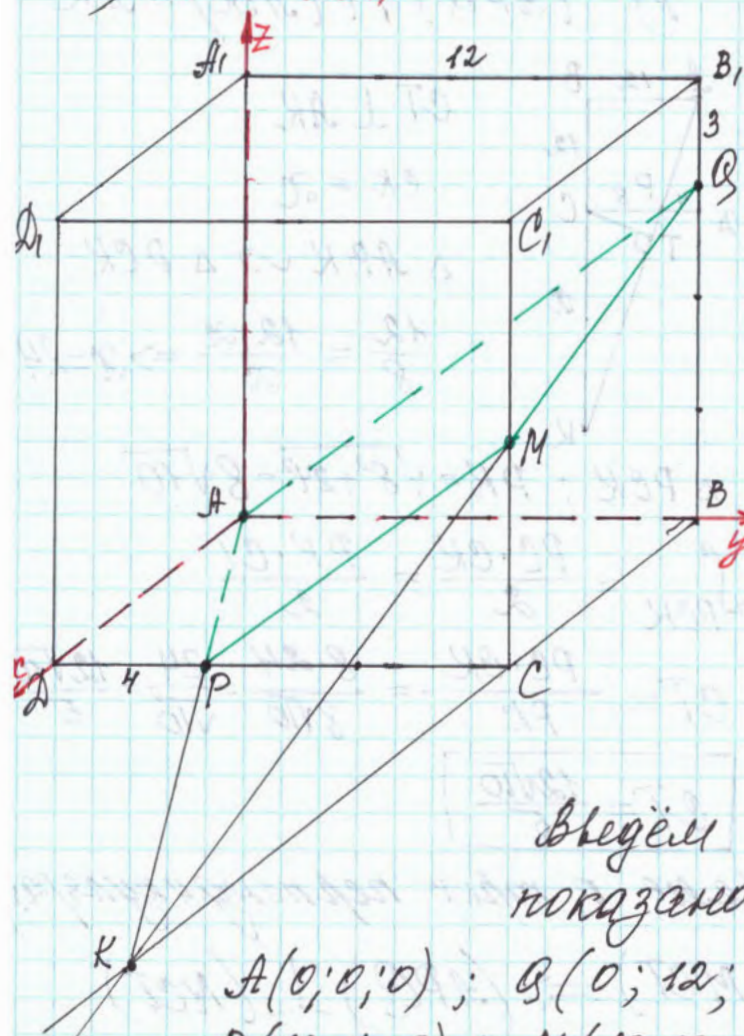
$$CH = \frac{24 \cdot 36}{36 \cdot \sqrt{26}} = \frac{24 \cdot \sqrt{26}}{26} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$\rho(C; (APQ)) = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

Ответ: $\delta) \frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.1. Куб

3) ЕГЭ - 2016



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $AB = 12$
 $P \in CA, AP = 4$
 $Q \in B_1 C_1, B_1 Q = 3$
 $(APQ) \cap CC_1 = M$

- а) Док-ть: M - середина CC_1
 б) Найти: $\rho(C; (APQ))$

II способ

- а) Строим сечение:
 AQ ; $AP \cap BC = K$; $KQ \cap CC_1 = M$
 PM ; MQ .

$APMQ$ - искомое сечение куба
 плоскостью (APQ) .

Введём систему координат как
 показано на рисунке.

$$A(0; 0; 0); Q(0; 12; 9) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \{0; 12; 9\}$$

$$P(12; 4; 0); M(12; 12; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{PM} \{0; 8; z_0\}$$

$$\overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{PM} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{9}{z_0} \Rightarrow z_0 = \frac{8 \cdot 9}{12} = 6 \Rightarrow M(12; 12; 6)$$

а это значит, что M - середина CC_1 .

- б) Составим уравнение плоскости (APQ) в виде
 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$A: 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$P: 12A + 4B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$Q: 0 \cdot A + 12B + 9C + D = 0$$

$$(APQ): x - 3y + 4z = 0$$

$$C(12; 12; 0)$$

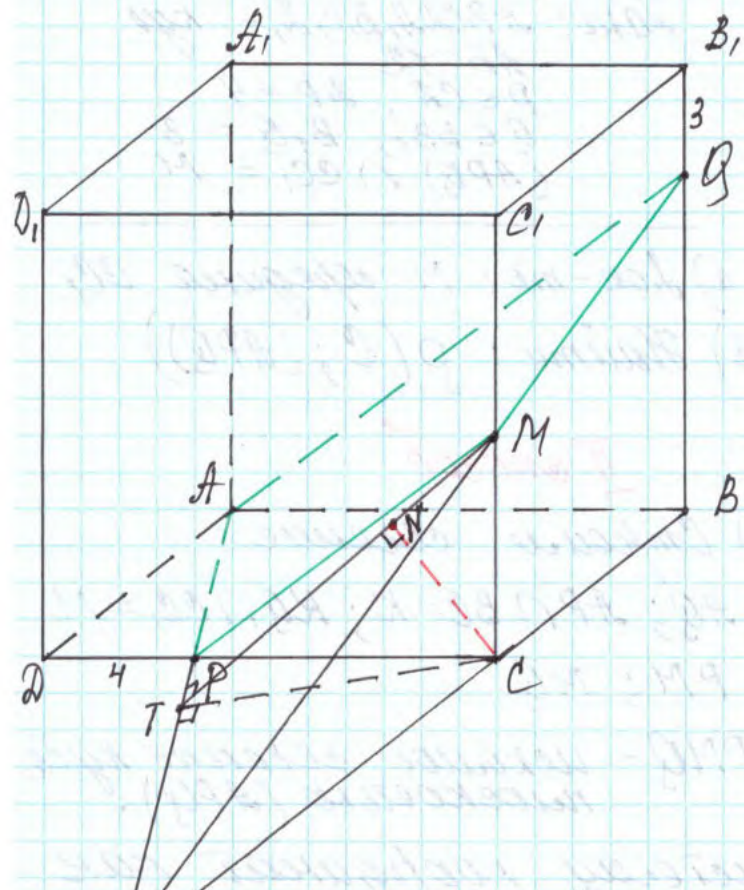
$$\rho(C; (APQ)) = \frac{|12 - 3 \cdot 12|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{24\sqrt{26}}{26} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

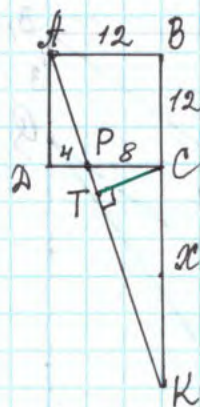
Пусть $B = -3$
 тогда

$$\begin{cases} D = 0 \\ 12A + 4B = 0 \\ 12B + 9C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ A = -\frac{1}{3}B \\ C = -\frac{4}{3}B \end{cases} \begin{matrix} A = 1 \\ C = 4 \\ D = 0 \end{matrix}$$

III способ



$$d) (APQ) \cap (ABC) = AK$$



CT L AK

$$eK = \mathcal{K}$$

$$\triangle ABK \sim \triangle PCK$$

$$\frac{12}{8} = \frac{12+x}{x} \Rightarrow x=24$$

$$\Delta PCK: PK = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}$$

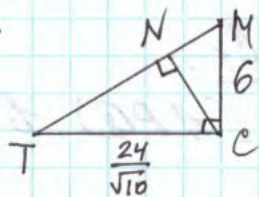
$$\int_{PCK} = \frac{PC \cdot CK}{2} = \frac{PK \cdot CT}{2}$$

$$C_T = \frac{P_C \cdot P_K}{P_K} = \frac{8 \cdot 24}{8\sqrt{10}} = \frac{24}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

$$C_T = \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} MT \perp AK \\ AK \perp MT \\ AK \perp TC \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp (MCT) \Rightarrow (APQ) \perp (MCT)$$

$CN \perp TM$, $CN = \rho(C; (APQ))$ — искомое расстояние.



$$\Delta MCT: MC \perp (ABC) \Rightarrow MC \perp TC$$

$$MT = \sqrt{MC^2 + CT^2} = \sqrt{6^2 + \frac{24^2}{10}} = 6\sqrt{1 + \frac{4^2}{10}} = \frac{6\sqrt{26}}{\sqrt{10}}$$

$$J_{MCT} = \frac{MC \cdot TC}{2} = \frac{MT \cdot CN}{2} \Rightarrow CN = \frac{MC \cdot TC}{MT}$$

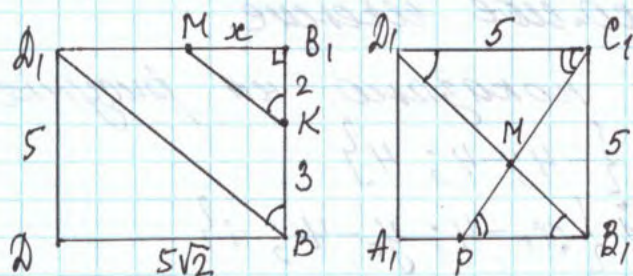
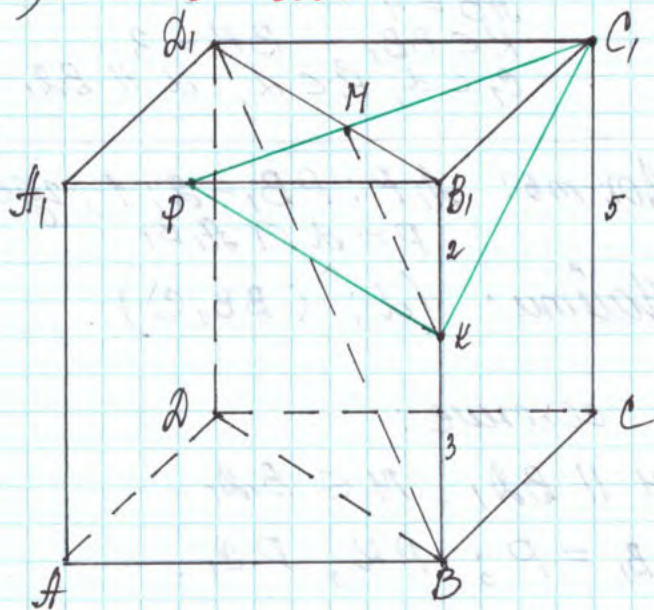
$$CN = \frac{6 \cdot 24 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{26}} = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$CN = P(C; (APB)) = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

Ombem: 8) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.1. Куб

4) ЕГЭ - 2015



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $AB = 5$
 $K \in BB_1$; $KB = 3$
 $K \in \alpha$, $C_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel BD_1$.

а) Док-ть: $A_1P : PB_1 = 1:2$,
 где $P = \alpha \cap A_1B_1$

б) Найти: объем большей части куба

а) Строим сечение:

KC_1 ; $KM \parallel BD_1$, $M \in B_1D_1$,
 $C_1M \cap A_1B_1 = P$; KP ; C_1P .

$(KC_1P) = \alpha$; ΔKC_1P - искомое сечение п.д

$MK \parallel D_1B$, $\Delta B_1KM \sim \Delta B_1B_1D_1$ по двум углам.
 $D_1B_1 = 5$, $D_1B = 5\sqrt{2}$. Пусть $MB_1 = x$, тогда $\frac{2}{5} = \frac{x}{5\sqrt{2}}$

$$x = 2\sqrt{2} \quad \boxed{MB_1 = 2\sqrt{2}} \quad D_1M = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

$\Delta D_1MC_1 \sim \Delta B_1MP$ по двум углам, $\frac{D_1C_1}{PB_1} = \frac{D_1M}{B_1M}$;

$$\frac{5}{PB_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow PB_1 = \frac{10}{3} \Rightarrow A_1P = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\underline{A_1P : PB_1 = \frac{5}{3} : \frac{10}{3} = 1:2.}$$

б) Плоскость α разбила объем куба на 2 части.
 KPC_1B_1 - пирамида, K - вершина, ΔPC_1B_1 - основание,
 KB_1 - высота.

$$V_{\text{меньшей части}} = \frac{1}{3} S_{PC_1B_1} \cdot KB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 2 = \frac{50}{3} = 5\frac{5}{3}$$

$$V_{\text{куба}} = 5^3 = 125$$

$$V_{\text{большей части}} = 125 - 5\frac{5}{3} = 119\frac{4}{3}$$

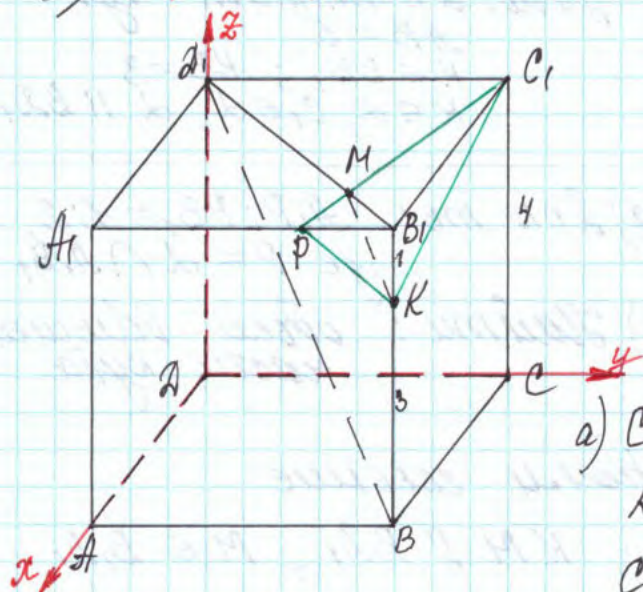
$$V_{\text{большей части}} = 119\frac{4}{3} = \frac{1075}{3}$$

Ответ: б) $119\frac{4}{3}$

14.1.

Куб

5) ЕГЭ - 2015

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$$AB = 4$$

$$K \in BB_1, BK = 3$$

$$C_1 \in \alpha, K \in \alpha, \alpha \perp BD_1$$

а) Доказ-ть: $AP : PB_1 = 2 : 1$, где $P = \alpha \cap A_1 B_1$ б) Найти: $(\alpha; \angle(BB_1, C))$.

а) Строим сечение:

$$KC_1; KM \parallel BD_1, M \in B_1 D_1$$

$$C_1 M \cap A_1 B_1 = P; PK, PC_1.$$

 $\triangle PKC_1$ - искомое сечение

Введём систему координат как показано на рисунке.

$$B(4; 4; 0), D_1(0; 0; 4) \Rightarrow \overrightarrow{BD_1} \{ -4; -4; 4 \}$$

$$K(4; 4; 3), M(x_0; y_0; 4) \Rightarrow \overrightarrow{KM} \{ x_0 - 4; y_0 - 4; 1 \}$$

$$\overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{KM} \Rightarrow \frac{x_0 - 4}{-4} = \frac{y_0 - 4}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = 3; y_0 = 3$$

$$M(3; 3; 4), C_1(0; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{MC_1} \{ -3; 1; 0 \}$$

$$P(4; y_1; 4), C_1(0; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{PC_1} \{ -4; 4 - y_1; 0 \}$$

$$\overrightarrow{MC_1} \perp \overrightarrow{PC_1} \Rightarrow \frac{4 - y_1}{1} = \frac{-4}{-3}; 12 - 3y_1 = 4, 3y_1 = 8, y_1 = \frac{8}{3}$$

$$AP = \frac{8}{3}, PB_1 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}, \text{значит } AP : PB_1 = \frac{8}{3} : \frac{4}{3} = 2 : 1.$$

$$\text{б) } \cos(\alpha; \angle(BB_1, C)) = |\cos(\vec{n}; \vec{m})|, \text{ где } \vec{n} - \text{вектор нормали } \alpha, \vec{m} \{ 0; 1; 0 \}, \vec{m} \perp (BB_1, C)$$

Составим уравнение плоскости α в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$P(4; \frac{8}{3}; 4) : 4A + \frac{8}{3}B + 4C + D = 0$$

$$4A - C = 0 \quad C = 4A \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{3}$$

$$K(4; 4; 3) : 4A + 4B + 3C + D = 0$$

$$\frac{4}{3}B - C = 0 \quad B = 3A \quad \frac{C}{B} = \frac{4}{3}$$

$$C_1(0; 4; 4) : 0A + 4B + 4C + D = 0$$

$$12A + 16A + D = 0 \quad D = -28A \quad D = -28$$

$$\alpha : x + 3y + 4z - 28 = 0 \quad \vec{n} \{ 1; 3; 4 \}$$

$$|\cos(\vec{n}; \vec{m})| = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4|}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin(\vec{n}; \vec{m}) = \sqrt{1 - \frac{9}{26}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg}(\vec{n}; \vec{m}) = \frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow (\alpha; \angle(BB_1, C)) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$ (или $\arccos \frac{3}{\sqrt{26}}$ или $\arcsin \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$)

Задание №14.1. Ответы.

1) $\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{11}$.

3) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

4) $\frac{1075}{9}$.

5) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Задание №14.1 (ДЗ). Кубы.

1) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 2.

а) Докажите, что угол между прямыми AD_1 и $A_1 B$ равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AD_1 и $A_1 B$.

2) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 3. На диагонали $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P : PC = 2 : 1$.

а) Докажите, что точка P принадлежит плоскости $BC_1 D$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AB .

3) На ребрах CD и $A_1 D_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 3$, а $D_1 Q = 4$. Плоскость BPQ пересекает ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1 .

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BPQ .

4) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 12. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 N : ND_1 = 2 : 1$, где N — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 D_1$.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

5) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 4$. Точка M — середина ребра $A_1 B_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости $C_1 KM$.

б) Найдите угол наклона плоскости $C_1 KM$ к плоскости $CC_1 D$.

Задание №14.1 (ДЗ). Ответы.

1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) $\sqrt{5}$.

3) $\frac{48\sqrt{29}}{29}$.

4) 1152.

5) $\operatorname{arctg} \sqrt{13}$.

Задание №14.2. Четырехугольные призмы.

1) (ЕГЭ-2015)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 , проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

3) (ЕГЭ-2017)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

4) (ЕГЭ-2017)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- Найдите объем призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

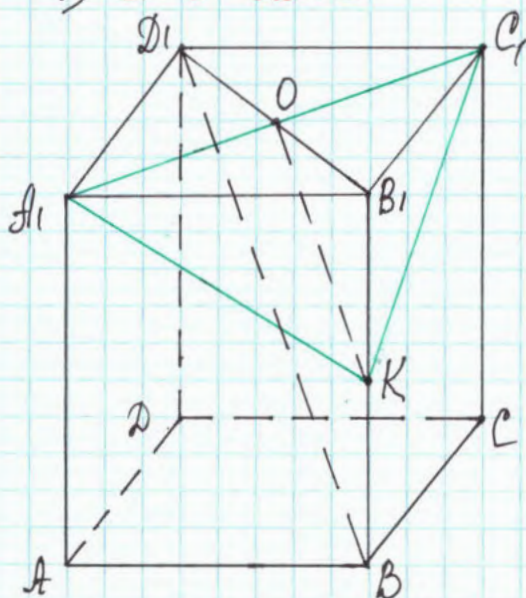
5) (ЕГЭ-2018)

На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причем $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что точка M — середина ребра DD_1 .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

14.2. Четырехугольные призмы.

1) ЕГЭ-2015



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - прямая призма
 $ABCD$ - квадрат
 $AB = 3\sqrt{2}$
 $BB_1 = 2\sqrt{7}$
 K - середина BB_1
 $K \in \alpha, C_1 \in \alpha, \alpha \parallel BD_1$

а) Док-ть: сечение - равнобедренный треугольник

б) Найти: периметр сечения

а) Строим сечение:

KC_1 ; $KO \parallel BD_1$, O - середина B_1A_1

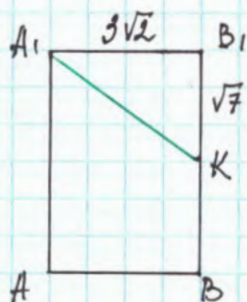
$C_1 O \cap A_1 B_1 = A_1$; KA_1

$\triangle A_1 C_1 K$ - искомое сечение призмы плоскостью α .
 Призма правильная, боковые грани равны,
 значит и отрезки $A_1 K$ и $C_1 K$ будут равны, т.е.

$\triangle A_1 C_1 K$ - равнобедренный треугольник.

б) $A_1 B_1 C_1 D_1$ - квадрат, $A_1 B_1 = 3\sqrt{2} \Rightarrow A_1 C_1 = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$

$AB B_1 A_1$ - прямоугольник, $A_1 B_1 = 3\sqrt{2}$; $BB_1 = 2\sqrt{7}$, K - середина BB_1 .



$B_1 K = \sqrt{7}$. По теореме Пифагора

$$A_1 K^2 = A_1 B_1^2 + B_1 K^2$$

$$A_1 K = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{18 + 7} = \sqrt{25} = 5.$$

$$P_{A_1 C_1 K} = A_1 C_1 + 2 \cdot A_1 K = 6 + 2 \cdot 5 = 16.$$

Ответ: б) 16

14.2. Четырехугольные призмы

2) ЕГЭ-2016

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - правильная призма

$$AB = 6, AA_1 = 4\sqrt{3}$$

$$M \in AB, N \in A_1 D_1, K \in C_1 D_1,$$

$$AM = A_1 N = C_1 K = 1$$

а) Док-ть: $MNKL$ - квадрат, если
 $L = (MNK) \cap BC$

б) Найти: $S_{сечения(MNK)}$

а) Строим сечение:

$$NK, NK \cap AB_1 = T, TM \cap AA_1 = E$$

$$ML \parallel NK \parallel AC, L \in BC$$

$$NK \cap B_1 C_1 = P, PL \cap C_1 C = F$$

$MENKFL$ - искомое сечение призмы плоскостью MNK .

$A_1 B_1 C_1 D_1$ - квадрат, $A_1 N = C_1 K = 1$

$$NK \parallel A_1 C_1, \angle C_1 A_1 B_1 = \angle NTA_1 = 45^\circ$$

$$TA_1 = NA_1 = 1. \text{ Аналогично } C_1 P = KC_1 = 1$$

$AB B_1 A_1$ - прямоугольник, $TA_1 = AM = 1$

$$\triangle TA_1 E = \triangle MAE \Rightarrow E - \text{середина } AA_1, EA = EA_1 = 2\sqrt{3}$$

$$ML \parallel AC \parallel A_1 C_1 \parallel NK, ML = NK$$

$$KH \perp AC, KH \perp (ABC)$$

$$KL - \text{наклонная к } (ABC)$$

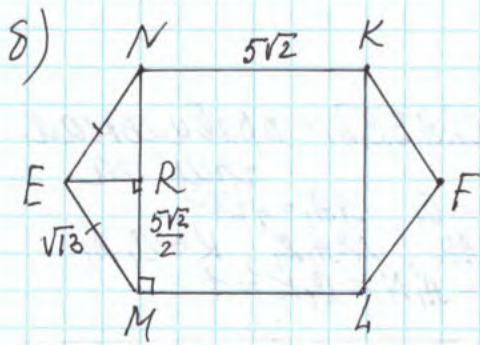
$$HL - \text{проекция } KL$$

$\Rightarrow KL \perp ML$
 по теореме о трех перпендикулярах

$$\triangle KHL: KH = AA_1 = 4\sqrt{3}; HL = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow KL = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\triangle BML \sim \triangle BAC: \frac{ML}{AC} = \frac{BL}{BC}; \frac{ML}{6\sqrt{2}} = \frac{5}{6} \Rightarrow ML = 5\sqrt{2}$$

В четырехугольнике $MNKL$: $NK \parallel ML, NK = ML, ML = KL$
 $KL \perp ML$
 значит $MNKL$ - квадрат.



$MNKL$ - квадрат, $MN = 5\sqrt{2}$

$MENKFL$ - шестигранник, в котором

$$ME = NE = KF = LF$$

$$\triangle AME: AM = 1, AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$ME = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13}$$

$$ER \perp MN, MR = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ER = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{13 - \frac{25}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle MEN} = \frac{MN \cdot ER}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 2,5$$

$$S_{\triangle KLF} = S_{\triangle MEN} = 2,5$$

$$S_{MNKL} = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

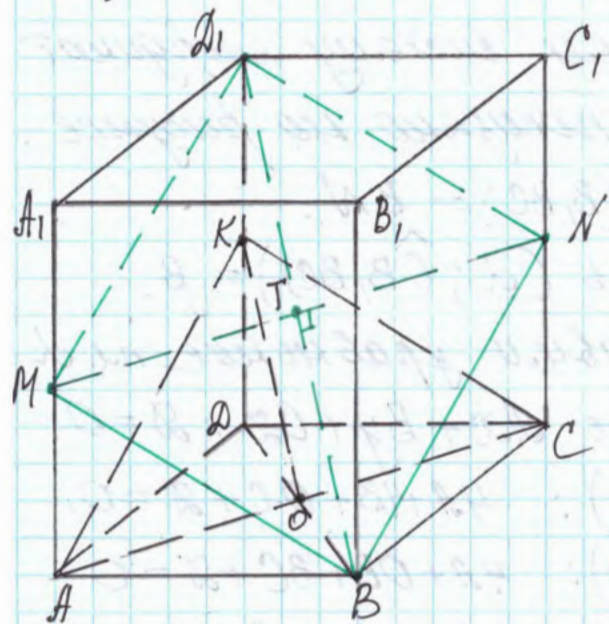
$$S_{MENKFL} = 2,5 + 2,5 + 50 = 55.$$

Ответ: 8) 55

14.2. Четырехугольные призмы

3) ЕГЭ-2014

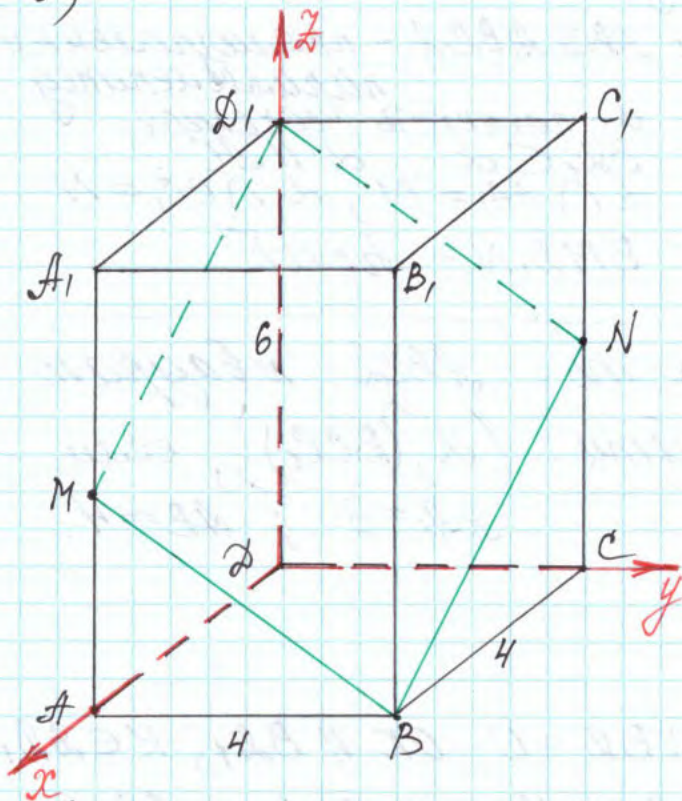
Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - прямоугольный параллелепипед
 α - плоскость сечения
 $BD_1 \subset \alpha$, $C \in \alpha$, $\alpha \parallel AC$
 $\alpha \cap AA_1 = M$, $\alpha \cap CC_1 = N$
 $BM D_1 N$ - ромб



- а) Док-ть: $ABCD$ - квадрат
 б) Найти: $(\alpha; \angle(BCC_1))$, если $AA_1 = 6$; $AB = 4$.

- а) Строим сечение: $AC \cap BD = O$, $OK \parallel BD_1$, $K \in DD_1$,
 $D_1 M \parallel KA$, O - середина $BD \Rightarrow K$ - середина $DD_1 \Rightarrow$
 M - середина AA_1 . Аналогично, N - середина CC_1 .
 $BM D_1 N$ - ромб, искомое сечение, т.к.
 содержит BD_1 и параллельно AC ($MN \parallel AC$).
 У ромба $MB = NB$ и $MN \perp BD_1$
 $BD_1 \perp MN \Rightarrow BD_1 \perp AC \Rightarrow OK \perp AC \Rightarrow OD \perp AC$.
 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали
 перпендикулярны, значит $ABCD$ - квадрат.

8)



$$AB = BC = 4$$

$$AA_1 = 6$$

Введём систему координат как показано на рисунке.

$$\alpha \cap (B, BC) = BN.$$

$$\text{Пусть } (\alpha; \hat{(B, BC)}) = \beta.$$

Составим уравнение пл. α

$$\text{в виде } Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$B(4; 4; 0): 4A + 4B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$M(4; 0; 3): 4A + 0B + 3C + D = 0$$

$$N(0; 4; 3): 0A + 4B + 3C + D = 0.$$

$$\begin{cases} 4A + 4B + D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \begin{cases} 4B - 3C = 0 \\ 3C - 4A = 0 \\ 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \begin{cases} B = \frac{3}{4}C \\ A = \frac{3}{4}C \\ D = -6C \end{cases} \begin{matrix} \text{Пусть } C = 4 \\ A = B = 3 \\ D = -24. \end{matrix}$$

$\alpha: 3x + 3y + 4z - 24 = 0$, $\vec{n} \{3; 3; 4\}$ - вектор нормали для плоскости (BCC_1) вектор нормали $\vec{m} \{0; 1; 0\}$.

$$\cos(\alpha; \hat{(BCC_1)}) = |\cos(\vec{n}; \vec{m})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} =$$

$$= \frac{|3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{9+9+16} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\boxed{\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5 \cdot \sqrt{34}}{\sqrt{34} \cdot 3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\beta = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}}$$

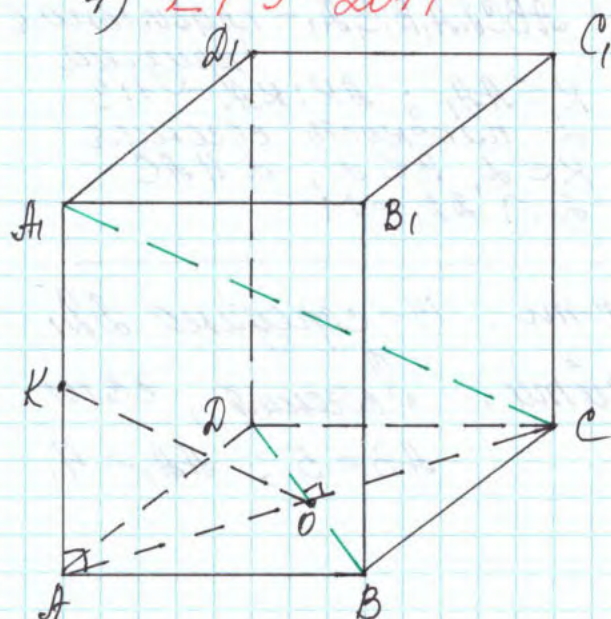
Ответ: 8) $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

14.2. Четырёхугольные

призмы.

4) ЕГЭ-2017

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - прямая призма
 $ABCD$ - ромб
 $AB = AA_1$



а) Док-ть: $A_1C \perp BD$

б) Найти: V , если $A_1C = BD = 2$.

а) $ABCD$ - ромб $\Rightarrow AC \perp BD$. $AC \cap BD = O$

Призма прямая, значит $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AC$.

Проведём $OK \parallel AA_1$, O - середина $AC \Rightarrow K$ - сер. AA_1 .

AK - перпендикуляр к плоскости основания

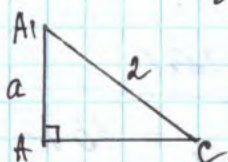
KO - наклонная

AO - проекция.

$BD \perp AO$, значит $BD \perp KO \Rightarrow BD \perp A_1C$
 (по теореме о трёх перпендикулярах).

б) $A_1C = 2$, $BD = 2$. Пусть $AB = a$, $AA_1 = a$.

$$V = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot AA_1 = \frac{AC \cdot 2}{2} \cdot AA_1 = AC \cdot AA_1.$$



$$AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{4 - a^2}$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - 1}, \quad AC = 2 \cdot AO = 2\sqrt{a^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - 1}$$

$$4 - a^2 = 4a^2 - 4$$

$$a^2 = \frac{8}{5}$$

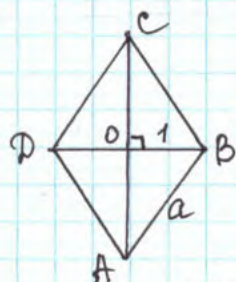
$$a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4 - \frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$V = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{5}$



14.2. Четырехугольные призмы

5) ЕГЭ-2018

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - правильная призма
 $K \in AA_1$; $AK:KA_1 = 1:3$
 α - плоскость сечения
 $K \in \alpha$, $B \in \alpha$, $\alpha \parallel AC$.
 $\alpha \cap DD_1 = M$

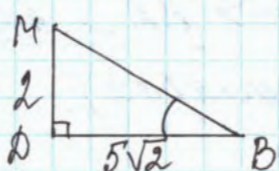
а) Док-ть: M - середина DD_1
 б) Найти: $S_{\text{сечения}}$, если $AB = 5$; $AA_1 = 4$.

а) Строим сечение: KB ; $KP \parallel AC$, $P \in CC_1$, $KM \parallel BP$, $PM \parallel BK$. $BKMP$ - искомое сечение.

$KP \parallel AC \Rightarrow CP:PC_1 = 1:3$. Пусть $AA_1 = a$, тогда $AK = CP = \frac{1}{4}a$,
 $KA_1 = PC_1 = \frac{3}{4}a$.

$KM \parallel BP \Rightarrow AM = \frac{2}{4}a = \frac{1}{2}a \Rightarrow M$ - середина DD_1 .

б) $ABCD$ - квадрат, $AB = 5$, $BD = 5\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = 5^2 = 25$.
 $MD \perp (ABC) \Rightarrow MD \perp DB$, $MD = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.



$$MB = \sqrt{MD^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 50} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\cos \angle MBD = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$\alpha \cap (ABC) = \ell$, $\ell \parallel AC$, $B \in \ell$.

ℓ - ребро двугранного угла между α и (ABC) .

$MB \perp \ell$, т.к. $BD \perp \ell$. $\Rightarrow \angle MBD$ - линейный угол.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \angle MBD}, \quad S_{\text{сеч}} = \frac{25 \cdot 3\sqrt{3}}{5} = 15\sqrt{3}$$

$$S_{\text{сеч}} = 15\sqrt{3}$$

Ответ: б) $15\sqrt{3}$.

Задание №14.2. Ответы.

1) 16.

2) 55.

3) $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

4) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

5) $15\sqrt{3}$.

Задание №14.2 (ДЗ). Четырехугольные призмы.

1) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота призмы равна 4. Точки M и K — середины ребер DD_1 и $B_1 C_1$, соответственно. Через точку K проведена плоскость α , параллельная плоскости AMC .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

2) В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. На ребрах DD_1 , BC и $A_1 B_1$ отмечены точки M , K и N соответственно, причем $DM = \sqrt{6}$, $BK = B_1 N = 2$. Плоскость MNK пересекает ребра CD и $A_1 D_1$ в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что $KEFN$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

3) Точка M — середина ребра CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сечением этого параллелепипеда плоскостью α , содержащей прямую AM и параллельной прямой BD , является ромб.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AB = 3$, $AA_1 = 4$.

4) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$. Точки M и N — середины ребер AB и $A_1 D_1$, соответственно.

а) Докажите, что прямые AC и MN перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $AB = 2$, $MN = \sqrt{13}$, $\angle BDB_1 = 60^\circ$.

5) На боковых ребрах AA_1 и CC_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки K и N соответственно, причем $AK : KA_1 = C_1 N : NC = 2 : 3$. Плоскость α содержит прямую KM , параллельна прямой BD и пересекает ребро BB_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M — середина ребра BB_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 2$, $AA_1 = 5$.

Задание №14.2 (ДЗ). Ответы.

1) $3\sqrt{2}$.

2) 40.

3) $\operatorname{arctg} \sqrt{10}$.

4) 12.

5) $3\sqrt{2}$.

Задание №14.3. Треугольные призмы.

1) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На ребрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = B_1N = C_1K = 2$.

- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M — середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объем пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

3) (ЕГЭ-2018)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1 .

- Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

4) (ЕГЭ-2019)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. M — середина ребра A_1C_1 , O — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 .

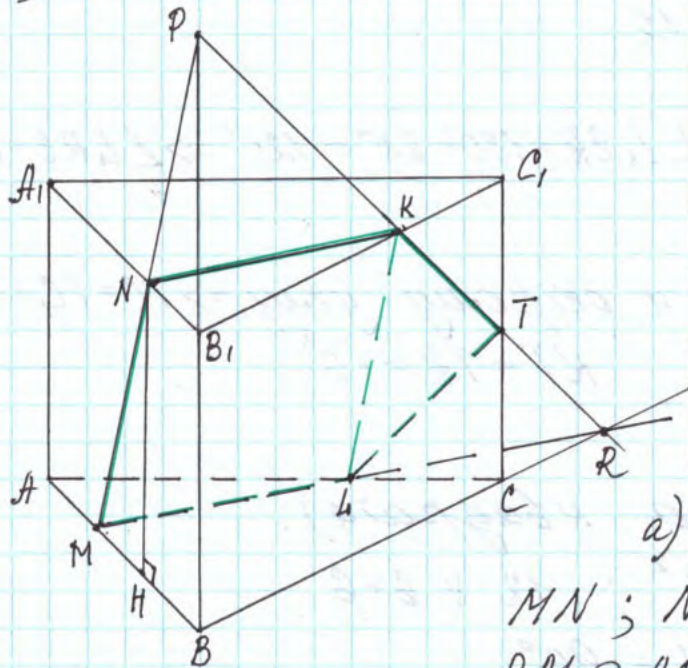
- Докажите, что точка пересечения прямой OC_1 с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABM , совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.
- Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью ABM .

5) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер AB и BC , соответственно. Точка K принадлежит боковому ребру AA_1 , $AK : KA_1 = 2 : 1$.

- Докажите, что прямая A_1N параллельна плоскости CMK .
- Найдите расстояние между прямой A_1N и плоскостью CMK , если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 3$.

14.3. Треугольные призмы

1) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная призма

$$AB = 6; AA_1 = 2\sqrt{2}$$

$$M \in AB; N \in A_1B_1; K \in B_1C_1$$

$$AM = 2, N = C_1, K = 2$$

а) Док-ть: $MNKL$ - квадрат,
если $L = (MNK) \cap AC$

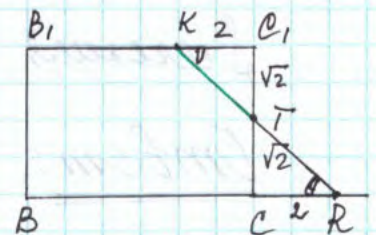
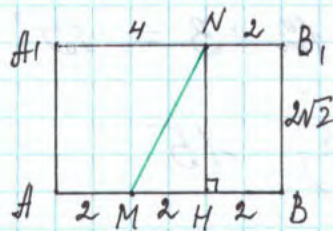
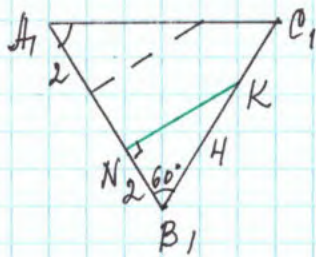
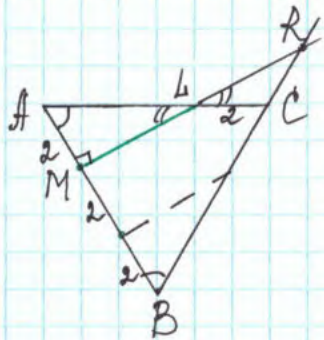
б) Найти: Сечение

а) Строим сечение:

$$MN; NK; MN \cap BB_1 = P, PK \cap BC = R$$

$$RM \cap AC = L; PR \cap CC_1 = T; KT; TL; ML.$$

$MNKL$ - искомое сечение



$$NH \perp AB, MH = 2, NH = 2\sqrt{2} \Rightarrow MN = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\triangle NB_1K$: по теореме косинусов $NK = \sqrt{NB_1^2 + KB_1^2 - 2 \cdot NB_1 \cdot KB_1 \cdot \cos 60^\circ}$

$$NK = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Проверим: $B_1K^2 \stackrel{?}{=} NB_1^2 + NK^2; 16 \stackrel{?}{=} 4 + 12$.

$$\text{т.к. } 16 = 4 + 12, B_1K^2 = NB_1^2 + NK^2 \Rightarrow \angle B_1NK = 90^\circ; NK \perp A_1B_1$$

$$NK \parallel ML, AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow ML \perp AB$$

NH - перпендикуляр к плоскости основания

MN - наклонная, MH - проекция, $ML \perp MN$, значит по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp ML$.

$\triangle AML = \triangle B_1NK$ по катету и прилежащему острому углу, значит $ML = NK$

В четырехугольнике $MNKL$: $ML \parallel NK, ML = NK, ML \perp MN$
 $NK = MN = 2\sqrt{3}$

значит $MNKL$ - квадрат

$$8) S_{сечення} = S_{MNKL} + S_{KTL}$$

$$S_{MNKL} = MN^2 = (\sqrt{12})^2 = 12.$$

$$\Delta LCR: CL = 2, \angle CLR = 30^\circ, \angle LCR = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle LRC = 30^\circ.$$

$$\text{значить } CR = CL = 2.$$

$$\Delta TCR = \Delta TC_1K \text{ по катету и острому углу} \Rightarrow TC = TC_1 = \sqrt{2}.$$

$$TR = \sqrt{TC^2 + CR^2} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}. \quad KT = TR = \sqrt{6}$$

$$\text{Аналогично } TL = \sqrt{6}.$$

$$KL = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (сторона квадрата).}$$

$$\text{Проверим: } KL^2 \vee TK^2 + TL^2; \quad 12 \vee 6 + 6.$$

$$KL^2 = TK^2 + TL^2 \Rightarrow \angle KTL = 90^\circ.$$

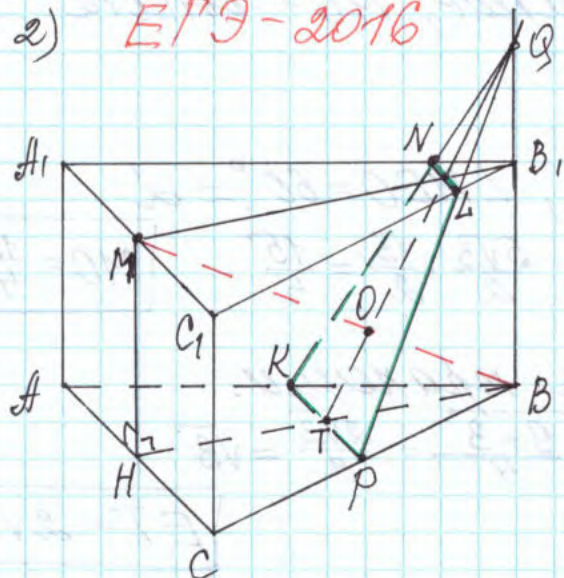
$$S_{KTL} = \frac{TK \cdot TL}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$S_{сечення} = 12 + 3 = 15.$$

Ответ: 8) 15

14.3. Треугольные призмы

2) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная призма

$$AB=6, AA_1=3$$

$$\angle B_1C_1; B_1L=1$$

$$K \in AB, AK=KB$$

$$M \in AA_1, AM=MC_1$$

γ - плоскость сечения
 $K \in \gamma, L \in \gamma; \gamma \parallel AC$

а) Док-ть: $BM \perp \gamma$

б) Найти: объем пирамиды, у которой M - вершина, основание - сечение.

а) Строим сечение: $KP \parallel AC, P \in BC; PL \cap BB_1 = Q$

$QK \cap AB_1 = N; KN; NL; LP$. $KNLP$ - искомое сечение.

$KP \parallel AC$, P - середина BC , $KP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

$NL \parallel KP$. Боковые грани равные прямоугольники, $\angle B_1 = \angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle P = \angle K$. $KNLP$ - равнобедренная трапеция.

$MH \perp AC, BH \perp AC, BH \cap KP = T$, T - середина KP .

QT - высота $\triangle QKP$, $QT \cap BM = O$.

$$BH = BM = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}; B_1E = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BB_1 = 3, TB = \frac{1}{2}BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Пусть } QB_1 = x.$$

$\triangle QB_1E \sim \triangle QBT$ по двум углам,

$$\frac{B_1E}{BT} = \frac{QB_1}{QB}; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{x}{x+3}; 3x = x+3$$

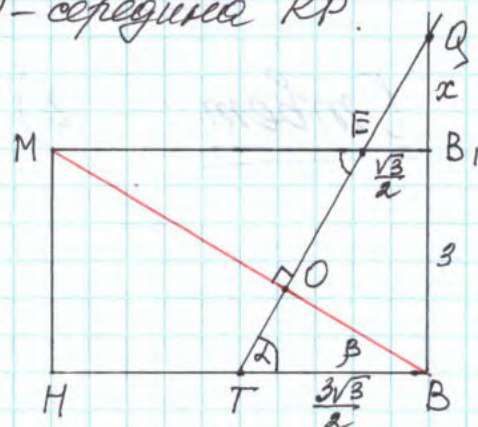
$$x = \frac{3}{2}, QB_1 = \frac{3}{2}, QB = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, QT = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27+81}{4}} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{BT}{QT} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{BH}{MH} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle TOB = 90^\circ$$

$$\underline{BM \perp \gamma}$$



8) Трапеция $MKLN$:

M - вершина, $KLNP$ - основание, MO - высота.

$$V_{MKLN} = \frac{1}{3} \cdot S_{KLNP} \cdot MO.$$

$$\triangle MOE: ME = 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \angle MEO = 60^\circ = \alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{MO}{ME}; \quad MO = ME \cdot \sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4} \quad \boxed{MO = \frac{15}{4}}$$

$KP = 3$, $NL = 1$, ET - высота трапеции.

$$QT = 3\sqrt{3}; \quad QE = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$ET = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{ET = 2\sqrt{3}}$$

$$S_{KLNP} = \frac{NL + KP}{2} \cdot ET$$

$$S_{KLNP} = \frac{1+3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{S_{KLNP} = 4\sqrt{3}}$$

$$V_{MKLN} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{15}{4} = 5\sqrt{3}$$

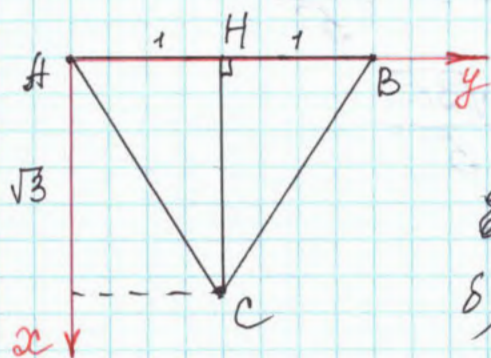
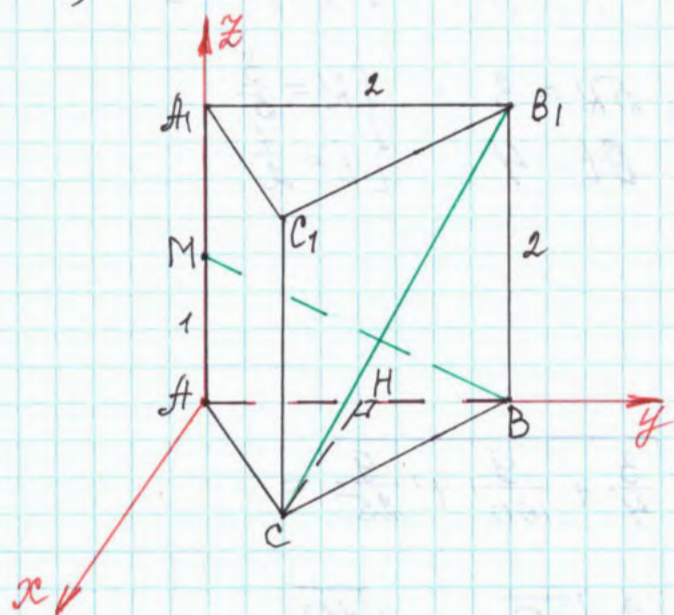
$$\boxed{V = 5\sqrt{3}}$$

Ответ: 8) $5\sqrt{3}$

14.3. Треугольные призмы

3) ЕГЭ-2018

Дано: $ABC A_1 B_1 C_1$ - правильная призма
 $AB = AA_1 = 2$
 M - середина AA_1



- а) Доказать: $MB \perp B_1 C$
 б) Найти: $\rho(MB; B_1 C)$

а) Введем систему координат как показано на рисунке.
 $CH \perp AB, CH = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$$M(0; 0; 1), B(0; 2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MB} \{0; 2; -1\}$$

$$B_1(0; 2; 2), C(\sqrt{3}; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{B_1 C} \{\sqrt{3}; -1; -2\}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{B_1 C} = 0 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = -2 + 2 = 0$$

Если $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{B_1 C} = 0$, то $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{B_1 C}$, $\Rightarrow MB \perp B_1 C$.

б) Метод "плавающих" точек.

Пусть $Q \in MB$, тогда $\overrightarrow{MQ} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MQ} \{0; 2k; -k\}$.

$$M(0; 0; 1), Q(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow \overrightarrow{MQ} \{x_1 - 0; y_1 - 0; z_1 - 1\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2k \\ z_1 - 1 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2k \\ z_1 = 1 - k \end{cases} \quad Q(0; 2k; 1 - k).$$

Пусть $P \in B_1 C$, тогда $\overrightarrow{B_1 P} = t \cdot \overrightarrow{B_1 C}$, $\overrightarrow{B_1 P} \{\sqrt{3}t; -t; -2t\}$

$$B_1(0; 2; 2), P(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{B_1 P} \{x_2 - 0; y_2 - 2; z_2 - 2\}$$

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{3}t \\ y_2 - 2 = -t \\ z_2 - 2 = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{3}t \\ y_2 = 2 - t \\ z_2 = 2 - 2t \end{cases} \quad P(\sqrt{3}t; 2 - t; 2 - 2t).$$

$$\overrightarrow{QP} \{\sqrt{3}t - 0; 2 - t - 2k; 2 - 2t - 1 + k\}$$

$$\overrightarrow{QP} \{\sqrt{3}t; 2 - t - 2k; 1 - 2t + k\}.$$

Потребуем, чтобы $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{B_1 C}$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{MB} = 0; \quad \sqrt{3}t \cdot 0 + (2-t-2k) \cdot 2 + (1-2t+k) \cdot (-1) = 0$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0; \quad \sqrt{3}t \cdot \sqrt{3} + (2-t-2k) \cdot (-1) + (1-2t+k) \cdot (-2) = 0$$

$$\begin{cases} 4-2t-4k-1+2t-k=0 \\ 3t-2+t+2k-2+4t-2k=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5k=3 \\ 6t=4 \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QP} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; 2-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}; 1-1+\frac{3}{5} \right\}$$

$$\overrightarrow{QP} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{10}; \frac{3}{5} \right\}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{100} + \frac{9}{25}} =$$

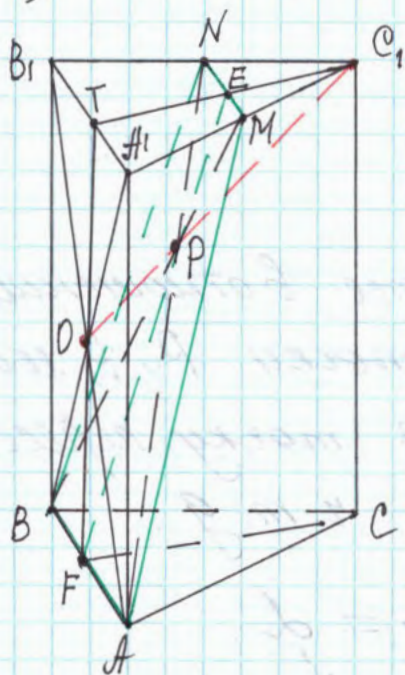
$$= \sqrt{\frac{45+9+36}{100}} = \sqrt{\frac{120}{100}} = \frac{2\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = QP = \rho(MB, B, C) = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

Ombem: 5) $\frac{\sqrt{30}}{5}$

14.3. Треугольные призмы

4) ЕГЭ-2019



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма
 $AB=2$, $AA_1=6$
 M — середина A_1C_1
 $AB_1 \cap A_1B = O$
 α — плоскость сечения
 $\alpha = (ABM)$

а) Док-ть: P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $OC_1 \cap \alpha = P$.

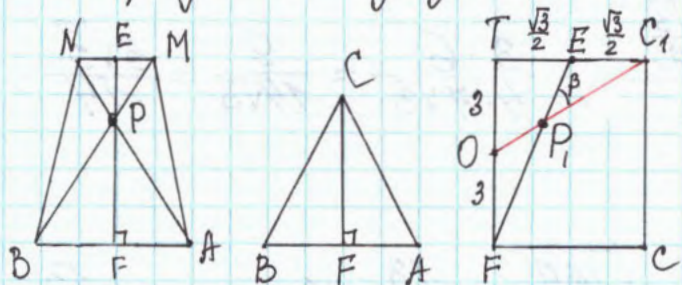
б) Найдите: $(OC_1; \hat{\alpha}(ABM))$

а) Строим сечение:

AB ; AM ; $MN \parallel AB$, $N \in B_1C_1$, N — сер. B_1C_1 .

$AMNB$ — искомое сечение.

MN — средняя линия $\Delta A_1B_1C_1$, боковые грани призмы равны, $AM=BN$, значит трапеция $AMNB$ — равнобедренная. $AN \cap BM = P$, P лежит на высоте, проведенной через середины двух оснований трапеции.



$C_1T \perp AA_1$, $CF \perp AB$, $O \in TF$

O — середина TF , E — середина C_1T .

$AB=2$, $MN=1$, $C_1T = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$TE = \frac{1}{2} C_1T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $TF=6$.

Из ΔTEF : $EF = \sqrt{TF^2 + TE^2} = \sqrt{6^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{36 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Пусть $PE=x$, тогда $PF = \frac{7\sqrt{3}}{2} - x$.

$\Delta MNP \sim \Delta BAP$ по двум углам;

$$\frac{MN}{AB} = \frac{PE}{PF} = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{7\sqrt{3}}{2} - x, \quad 3x = \frac{7\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

$$PE = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Точка P делит высоту трапеции EF в отношении 1:2, считая с верхнего основания.

Допустим, что OC_1 и EF пересекаются в какой-то другой точке P_1 . Найдём отношение $\frac{PE}{P_1F}$.

Для $\triangle TEF$ и прямой OC_1 по теореме Менелая:

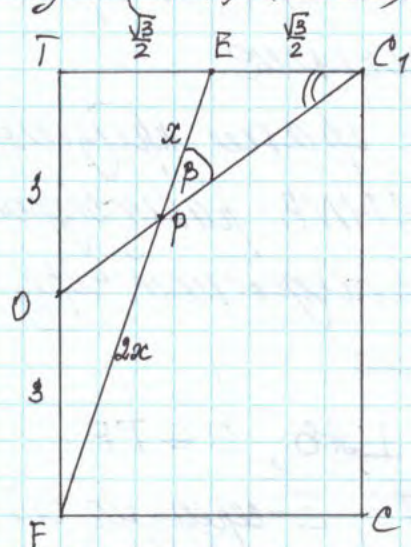
$$\frac{TC_1}{C_1E} \cdot \frac{EP}{PF} \cdot \frac{FO}{OT} = 1 ;$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{1}{1} = 1 ;$$

$$\frac{PE}{PF} = \frac{1}{2}$$

Точка P_1 делит отрезок EF тоже в отношении 1:2, начиная от точки E , значит точки P_1, P совпадают, т.е. прямая OC_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $AMNB$, ч.т.д.

$$\delta). (\angle OC_1; \widehat{ABM}) = (\angle OC_1; \widehat{EF}) = \angle EPC_1 = \beta.$$



$$\triangle TOC_1 : \tan \angle TC_1O = \frac{TO}{TC_1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{значит } \angle TC_1O = 60^\circ$$

$\triangle PEC_1$ по теореме синусов:

$$\frac{EC_1}{\sin \beta} = \frac{PE}{\sin 60^\circ} ; \sin \beta = \frac{EC_1 \cdot \sin 60^\circ}{PE}$$

$$\sin \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4\sqrt{3}}{6}} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{9}{14\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\beta = \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

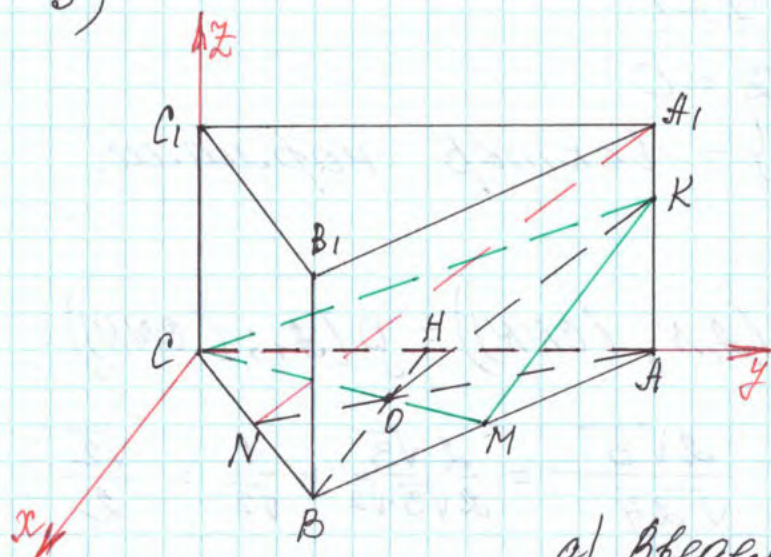
$$\cos \beta = +\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{27}{196}} = \sqrt{\frac{169}{196}} = \frac{13}{14}, \beta = \arccos \frac{13}{14}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 14}{14 \cdot 13} = \frac{3\sqrt{3}}{13}, \beta = \arctan \frac{3\sqrt{3}}{13}$$

Ответ: $\delta) \arccos \frac{13}{14}$

14.3. Треугольные призмы.

5)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная призма

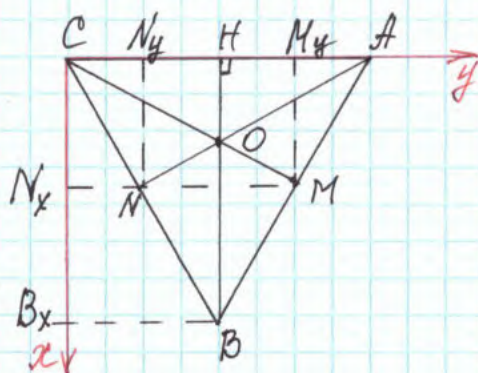
M - середина AB

N - середина BC

$K \in AA_1$; $AK:KA_1 = 2:1$

а) Док-ть: $A_1N \parallel (CMK)$

б) Найти: $\rho(A_1N; (CMK))$,
если $AB=4$, $AA_1=3$.



а) Введем систему координат как показано на рисунке.

Пусть $AB=a$, тогда $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$CN_x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $CH = \frac{a}{2}$, $CN_y = \frac{a}{4}$, $CM_y = \frac{3a}{4}$

$C(0;0;0)$; $M(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{3a}{4}; 0)$

Пусть $CC_1=b$, тогда $AK = \frac{2b}{3}$; $K(0; a; \frac{2b}{3})$

Составим уравнение плоскости

(CMK) в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

C : $0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0 \Rightarrow D = 0$

M : $\frac{a\sqrt{3}}{4}A + \frac{3a}{4}B + 0 \cdot C + 0 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\sqrt{3}}{3}A$

K : $0 \cdot A + a \cdot B + \frac{2b}{3}C + 0 = 0 \Rightarrow 3aB + 2bC = 0 \Rightarrow B = -\frac{2b}{3a}C$

тогда $\frac{\sqrt{3}}{3}A = \frac{2b}{3a}C \Rightarrow C = \frac{a\sqrt{3}}{2b}A$

Пусть $A=1$, тогда $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $C = \frac{a\sqrt{3}}{2b}$, $D=0$.

(CMK) : $x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{a\sqrt{3}}{2b}z = 0$, $\vec{n} \{ 1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{2b} \}$ - вектор нормали

$A_1(0; a; b)$; $N(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{A_1N} \{ \frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{3a}{4}; -b \}$

$\overrightarrow{A_1N} \cdot \vec{n} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot 1 + (-\frac{3a}{4}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) + (-b) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2b} = \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$

$\overrightarrow{A_1N} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1N} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{A_1N} \parallel (CMK)$, ч.т.д.

$$\delta) AB = a = 4; \quad AA_1 = b = 3.$$

$$(CMK): x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$$

$$3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z = 0$$

$\vec{m} \{ 3; -\sqrt{3}; 2\sqrt{3} \}$ - вектор нормали.

$$A_1(0; 4; 3)$$

$$\text{т.к. } A_1N \perp (CMK), \text{ то } \rho(A_1N; (CMK)) = \rho(A_1; (CMK)) =$$

$$= \frac{0 \cdot 3 - 4 \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho(A_1N; (CMK)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\delta) \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задание №14.3. Ответы.

1) 15.

2) $5\sqrt{3}$.

3) $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

4) $\arccos \frac{13}{14}$.

5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание №14.3 (ДЗ). Треугольные призмы.

1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{15}$. На ребрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = B_1N = 3$, $C_1K = 2$.

- а) Пусть P — точка пересечения плоскости MNK с ребром CC_1 . Докажите, что треугольник MNP является равносторонним.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

3) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 4. Точка M — середина ребра BC . На ребре BB_1 отмечена точка N так, что $B_1N = 1$.

- а) Докажите, что прямые AN и A_1M перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AN и A_1M .

4) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Точки M и N — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 , соответственно.

- а) Докажите, что точка пересечения прямой CM с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABN , совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.
- б) Найдите угол между прямой CM и плоскостью ABN .

5) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер AB и A_1C_1 , соответственно. Точка K принадлежит боковому ребру AA_1 , $AK : KA_1 = 2 : 1$.

- а) Докажите, что прямая BN параллельна плоскости CMK .
- б) Найдите расстояние между прямой BN и плоскостью CMK , если известно, что $AB = 2$, $AA_1 = 3$.

Задание №14.3 (ДЗ). Ответы.

1) $28\sqrt{3}$.

2) $\frac{3}{4}$.

3) $\frac{8\sqrt{21}}{35}$.

4) $\arccos \frac{\sqrt{7}}{14}$.

5) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Задание №14.4. Четырехугольные пирамиды.

1) (ЕГЭ-2015)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

2) (ЕГЭ-2015)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

3) (ЕГЭ-2016)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота равна 4. На ребрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

4) (ЕГЭ-2017)

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что точка P — середина BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 9$.

5) (ЕГЭ-2017)

В основании пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, а прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .
- Найдите объем пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 8.

6) (ЕГЭ-2018)

На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причем $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

- Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 6.

7) (ЕГЭ-2019)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7$, $SA = 14$. На ребрах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причем $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру SA .

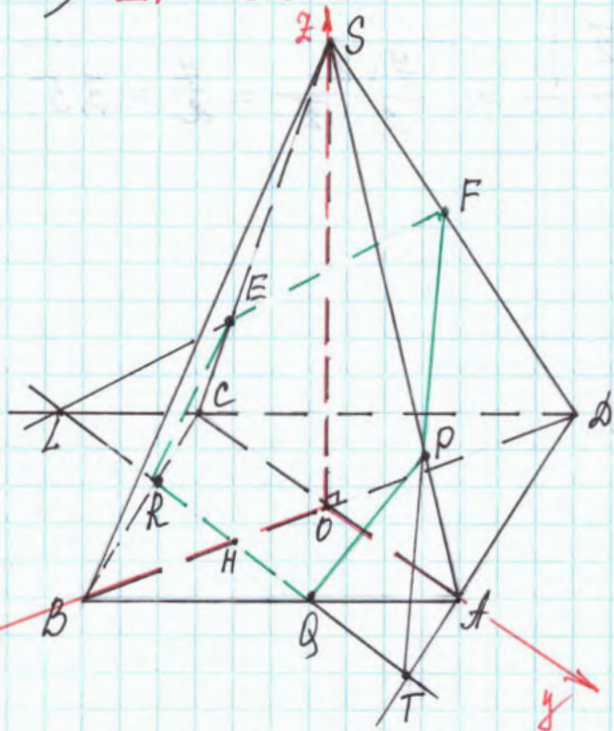
- Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости α .

14.4.

Четырёхугольные пирамиды

1) ЕГЭ-2015

Дано: $SABCD$ - правильная пирамида
 $AB = SA = 5$
 $P \in SA$; $Q \in AB$; $R \in BC$
 $PA = AQ = RS = 2$

а) Док-ть: $(PQR) \perp SD$ б) Найдите: $\rho(D; (PQR))$.

а) Строим сечение:

$$QR \cap AD = T, TP \cap SD = F$$

$$QR \cap CD = L, LF \cap SC = E$$

 $PQREF$ - искомое сечение.

Введём систему координат

как показано на рисунке.

$$AB = 5, AQ = 2, BQ = 3, AC = BD = 5\sqrt{2}, OA = OB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$OH = \frac{2}{5} \cdot OB = \frac{2 \cdot 5\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \sqrt{2}, OT = \frac{3}{5} \cdot OA = \frac{3 \cdot 5\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$Q(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0); R(\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0), P(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$$

$$OP_1 = \frac{3}{5} \cdot OA = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P_1 \text{ совпадает с точкой } T.$$

$$SO = \sqrt{5^2 - (\frac{5\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad \boxed{SO = OA}$$

$$PP_1 = PT = \frac{2}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Составим уравнение плоскости (PQR) в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$P: 0 \cdot A + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot B + \sqrt{2} \cdot C + D = 0$$

$$B = 0$$

$$B = 0$$

Пусть

$$C = 1$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$D = -\sqrt{2}$$

$$Q: \sqrt{2} \cdot A + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$D = -\sqrt{2}C$$

$$D = -\sqrt{2}C$$

$$R: \sqrt{2} \cdot A - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot A - \sqrt{2} \cdot C = 0$$

$$A = C$$

$$(PQR): x + z - \sqrt{2} = 0.$$

 $\vec{n} \{1; 0; 1\}$ - вектор норм.

$$S(0; 0; \frac{5\sqrt{2}}{2}); D(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0; 0) \Rightarrow \vec{SD} \{ -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{5\sqrt{2}}{2} \}$$

 $\vec{m} \{1; 0; 1\}$ - направляющий вектор прямой SD .Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны (могли быть коллинеарны),значит $(PQR) \perp SD$.

$$d) (PQR): x + z - \sqrt{2} = 0$$

$$Q\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

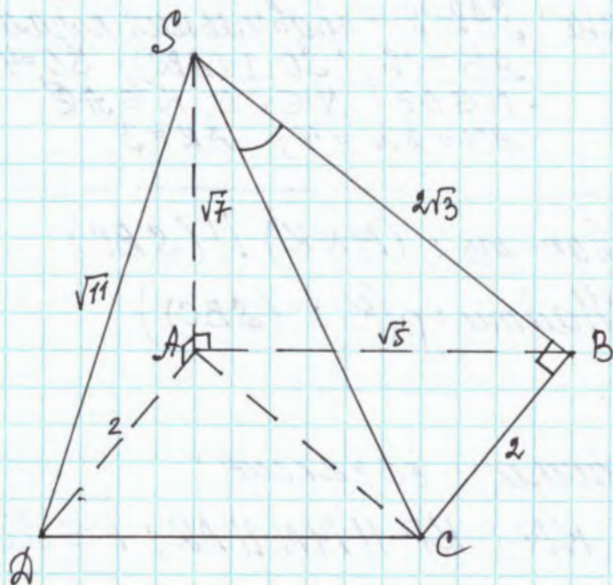
$$\rho(Q; (PQR)) = \frac{\left| -\frac{5\sqrt{2}}{2} + 0 - \sqrt{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{\rho(Q; (PQR)) = 2}$$

Antwort: d) 2

14.4. Четырёхугольные пирамиды

2) ЕГЭ-2015



Дано: $SABCD$ - пирамида
 $ABCD$ - прямоугольник
 $AB = \sqrt{5}$; $BC = 2$
 $SA = \sqrt{7}$; $SB = 2\sqrt{3}$; $SD = \sqrt{11}$

а) Док-ть: SA - высота

б) Найти: $(SC; \hat{(ASB)})$

а) В треугольнике SAB найдем $\cos \angle SAB$ по теореме косинусов: $\cos \angle SAB = \frac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2 \cdot SA \cdot AB}$

$$\cos \angle SAB = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 + 5 - 12}{2\sqrt{35}} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$$

Аналогично найдем $\cos \angle SAD = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2 \cdot SA \cdot AD}$

$$\cos \angle SAD = \frac{(\sqrt{7})^2 + 2^2 - (\sqrt{11})^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2} = \frac{7 + 4 - 11}{4\sqrt{7}} = 0 \Rightarrow \angle SAD = 90^\circ$$

$SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, значит $SA \perp (ABD)$, т.е. SA - высота.

б). $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow CB \perp SB$, $\angle SBC = 90^\circ$

$$(SC; \hat{(ASB)}) = (SC; SB) = \angle BSC$$

$$\text{Из } \triangle BSC: \operatorname{tg} \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle BSC = 30^\circ$$

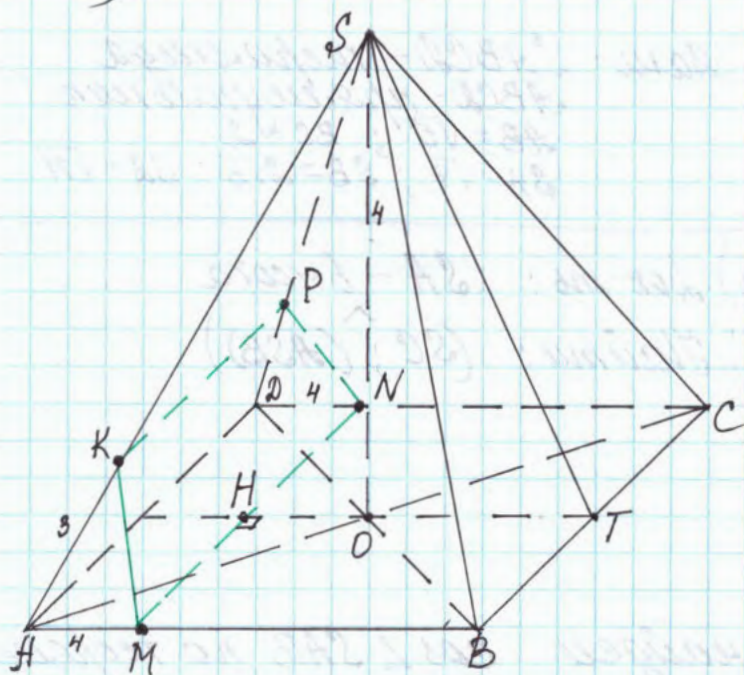
$$(SC; \hat{(ASB)}) = 30^\circ$$

Ответ: б) 30°

14.4.

Четырёхугольные пирамиды

3) ЕГЭ-2016



Дано: $SABCD$ - правильная пирамида
 $AB = 16$, $SO \perp (ABC)$, $SO = 4$
 $M \in AB$; $N \in CD$, $K \in AS$
 $AM = AN = 4$; $AK = 3$.

а) Доказ-ть: $(MNK) \parallel (SBC)$ б) Найти: $\rho(K; (SBC))$

а) Строим сечение:

 MN ; KM ; $KP \parallel MN \parallel AD$; $P \in SD$ KP ; PN . $KPNM$ - искомое сечение.

$$AM = AN = 4 \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC.$$

$$AC = 16\sqrt{2}; \quad AO = 8\sqrt{2}; \quad SO = 4 \Rightarrow AS = \sqrt{4^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$AK = 3, \quad SK = 12 - 3 = 9.$$

$$\text{В } \triangle SAB: SA = SB; \quad \frac{AM}{AB} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad \frac{AK}{AS} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$\triangle AMK \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними, значит $KM \parallel SB$.

В плоскостях (MNK) и (SBC) : $KM \parallel SB$ и $MN \parallel BC$, поэтому $(MNK) \parallel (SBC)$.

$$\text{б) } \rho(K; (SBC)) = \rho(MN; (SBC)) = \rho(H; (SBC)), \text{ где } OH \perp MN$$

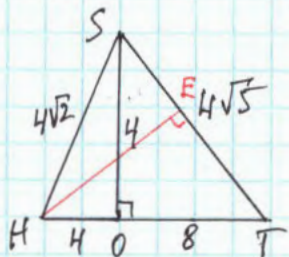
$$OH = 4, \quad OT = 8 \Rightarrow HT = 12.$$

$$\triangle SOT: ST = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$SH = 4\sqrt{2}, \quad S_{SHT} = \frac{SO \cdot HT}{2} = \frac{ST \cdot HE}{2}; \quad HE = \frac{SO \cdot HT}{ST}$$

$$HE = \frac{4 \cdot 12}{4\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$HE - \text{искомое расстояние. } \rho(K; (SBC)) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

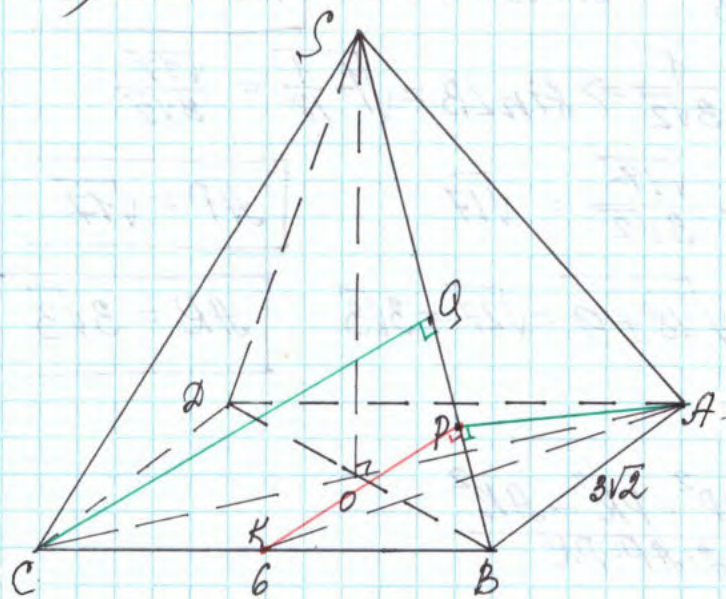


Ответ: б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

14.4.

Четырехугольные пирамиды

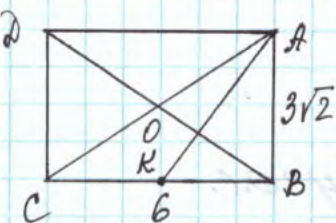
4) ЕГЭ - 2017



Дано: $SABCD$ - пирамида
 $ABCD$ - прямоугольник
 $AC \cap BD = O$, $SO \perp (ABC)$
 $AB = 3\sqrt{2}$; $BC = 6$
 $AP \perp SB$; $CQ \perp SB$

а) Док-ть: P - середина BQ
 б) Найти: $(SBA); (SBC)$, если $SO = 9$.

угол между
 гранями
 SBA и SBC .



а) $AO = BO = CO = DO$, SO - высота $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$.
 Пусть боковые ребра равны a .

$\triangle SBC$: $SC = SB = a$, $BC = 6$

по теореме косинусов

$$\cos \angle SBC = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SB \cdot BC} = \frac{a^2 + 36 - a^2}{2 \cdot a \cdot 6} = \frac{3}{a}$$

$$\triangle BCQ: \cos \angle QBC = \frac{BQ}{BC} \Rightarrow BQ = 6 \cdot \frac{3}{a} = \frac{18}{a}$$

$$\triangle SAB: \cos \angle SBA = \frac{a^2 + (3\sqrt{2})^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3}{a\sqrt{2}};$$

$$\triangle ABP: \cos \angle PBA = \frac{BP}{AB} \Rightarrow BP = 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{a\sqrt{2}} = \frac{9}{a}$$

$$BQ = \frac{18}{a}, BP = \frac{9}{a} \Rightarrow BQ = 2BP, P - \text{середина } BQ.$$

б) $(SBA) \cap (SBC) = SB$, SB - ребро двугранного угла.

$PK \perp SB$, P - середина $BQ \Rightarrow K$ - середина BC .

$\angle APK$ - линейный угол между плоскостями, если он будет не больше 90° - если этот угол окажется тупым, то возьмем ему смежный угол.

По заданию надо найти угол между гранями, а не между плоскостями, значит это $\angle APK$.
 (он может быть и тупым)

$$\Delta SBC: \cos B = \frac{3}{a} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$KP = BK \cdot \sin B = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{KP = 2\sqrt{2}}$$

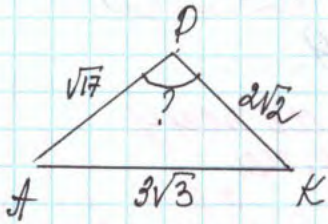
$$\Delta SBA: \cos B = \frac{3}{a\sqrt{2}} = \frac{3}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$$

$$AP = AB \cdot \sin B = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{17}$$

$$\boxed{AP = \sqrt{17}}$$

$$\Delta ABK: AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{18 + 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\boxed{AK = 3\sqrt{3}}$$



$\Delta APK:$

$$\cos \angle APK = \frac{AP^2 + PK^2 - AK^2}{2 \cdot AP \cdot PK}$$

$$\cos \angle APK = \frac{17 + 8 - 27}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-2}{4\sqrt{34}} = \frac{-1}{2\sqrt{34}}$$

$$\angle APK = \arccos\left(\frac{-1}{2\sqrt{34}}\right) - \text{мысли упр.}$$

$$\sin \angle APK = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{136}} = \sqrt{\frac{135}{136}} = \frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{34}}$$

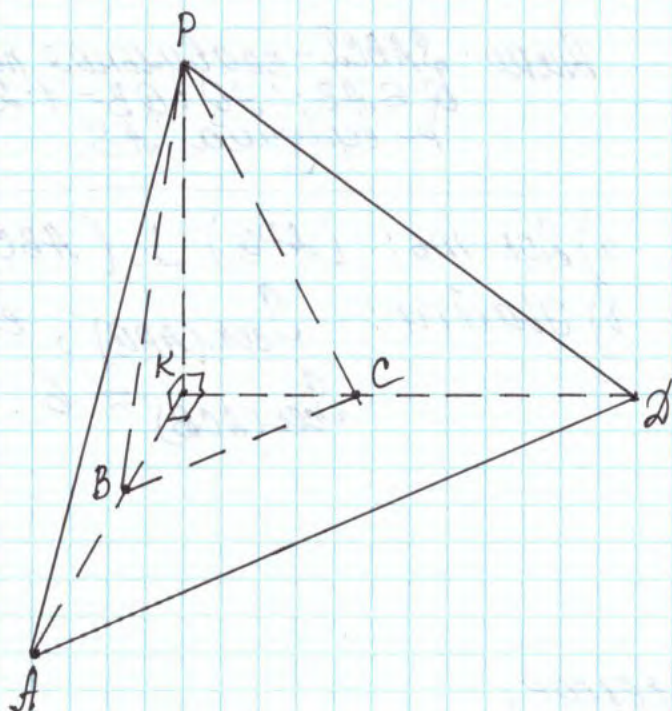
$$\operatorname{tg} \angle APK = \frac{\sin \angle APK}{\cos \angle APK} = \frac{3\sqrt{15}}{-1} = -3\sqrt{15}$$

$$\operatorname{arctg}(-3\sqrt{15}) = \arccos\left(\frac{-1}{2\sqrt{34}}\right) - \text{используем упр.}$$

Ответ: $\delta) \operatorname{arctg}(-3\sqrt{15})$.

14.4. Четырехугольные пирамиды

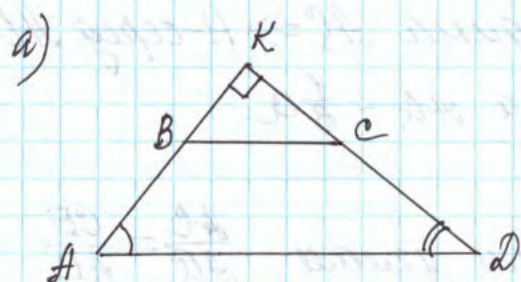
5) ЕГЭ - 2017



Дано: $PABCD$ - пирамида
 $ABCD$ - трапеция
 $BC \parallel AD$, $AD > BC$
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $(PAB) \perp (ABC)$
 $(PCD) \perp (ABC)$
 $AB \cap CD = K$

а) Доказать: $(PAB) \perp (PCD)$

б) Найти: V_{PKBC} , если
 $AB = BC = CD = 3$
 высота пирамиды 8



Если $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$, то $\angle AKD = 90^\circ$.
 $(PAB) \cap (PCD) = PK$, но эти пл-ты
 перпендикулярны основанию,
 значит $KP \perp (ABC)$, т.е. PK - высота.

$AK \perp KD$ и $AK \perp KP \Rightarrow AK \perp (PCD) \Rightarrow (PAB) \perp (PCD)$

б) $AB = BC = CD = 3$; $PK = 8$.

$ABCD$ - равнобедренная трапеция, $\angle A = \angle D$, но тогда
 $\angle KBC = \angle KCB = 45^\circ \Rightarrow BK = KC = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$S_{KBC} = \frac{BK \cdot KC}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{9}{4}$$

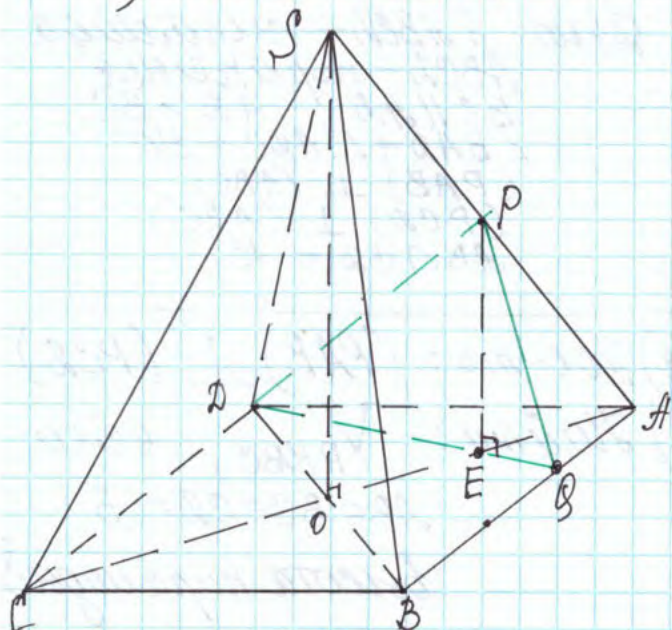
$$V_{PKBC} = \frac{1}{3} S_{KBC} \cdot PK = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 8 = 6.$$

$$V_{PKBC} = 6$$

Ответ: б) 6

14.4. Четырехугольные пирамиды

в) ЕГЭ - 2018

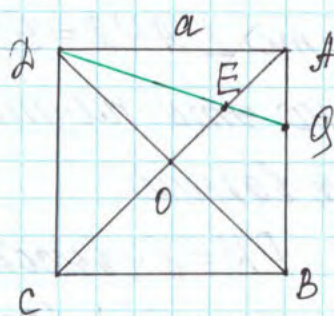


Дано: $SABCD$ - правильная пирамида
 $Q \in AB$; $AQ:QB = 1:2$
 P - середина AS

а) Доказать: $(APQ) \perp (ABC)$

б) Найти: $S_{\text{сеч.}(APQ)}$, если $S_{\text{сеч.}(ACB)} = 6$.

а) $\triangle APQ$ - искомого сечения.



$PH \perp AC$, P - середина $AS \Rightarrow H$ - серед. AO .
 Пусть $AB = a$, тогда $AQ = \frac{1}{3}a$

$$DQ \cap AC = E$$

$\triangle DCE \sim \triangle QAE$ по двум углам, $\frac{DC}{AQ} = \frac{CE}{AE}$

$$\frac{a \cdot 3}{a} = \frac{CE}{AE}, \frac{CE}{AE} = \frac{3}{1}, CE = 3AE, AE = OE$$

т.е. E - середина AO , поэтому точки H и E совпадают.

$PE \perp (ABC)$ и $PEC \subset (APQ) \Rightarrow (APQ) \perp (ABC)$.

$$б) S_{\text{сеч.}} = \frac{AQ \cdot SO}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot SO}{2}; \frac{a\sqrt{2} \cdot SO}{2} = 6; a\sqrt{2} \cdot SO = 12$$

$$SO = \frac{12}{a\sqrt{2}}; PE = \frac{1}{2}SO = \frac{6}{a\sqrt{2}}$$

$$AQ = \sqrt{AO^2 + OQ^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = a\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$S_{APQ} = \frac{AQ \cdot PE}{2} = \frac{a\sqrt{10} \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

$$\boxed{S_{APQ} = \sqrt{5}}$$

Ответ: б) $\sqrt{5}$

14.4. Четырехугольные пирамиды

7) ЕГЭ-2019

Дано: $SABCD$ - правильная пирамида

$$AB=7, SA=14.$$

$$N \in CB, K \in SC$$

$$SN:NC = SK:KC = 2:5$$

α - плоскость сечения NKC , $\alpha \parallel SA$

а) Док-ть: $\alpha \parallel BC$

б) Найти: $\rho(B; \alpha)$.

а) Введем систему координат как показано на рисунке.

$$SO \perp (ABC), O(0; 0; 0)$$

$$KH \perp (ABC), OH:HC = 2:5$$

$$AB=7, AN=2, CN=5, AC=4\sqrt{2}, AO=OC=\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$ON_1: N_1C = 2:5 \Rightarrow \text{точки } N_1 \text{ и } H \text{ совпадают}$$

$$OH = \frac{2}{7} OC = \frac{2}{7} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$ON_2 = \frac{5}{7} \cdot OD = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2}}{7 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$SC=14, SK=4, CK=10.$$

$$\Delta SCO: SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{14^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{196 - 49} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$KO = \frac{5}{7} \cdot SO = \frac{5}{7} \cdot \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; K\left(\sqrt{2}; 0; \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{AS} \left\{ \frac{7\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right\}$$

Составим уравнение плоскости α в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$N \in \alpha: \sqrt{2}A + \frac{5\sqrt{2}}{2}B + 0 \cdot C + D = 0$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}B - \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}C = 0$$

$$K \in \alpha: \sqrt{2}A + 0 \cdot B + \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}C + D = 0$$

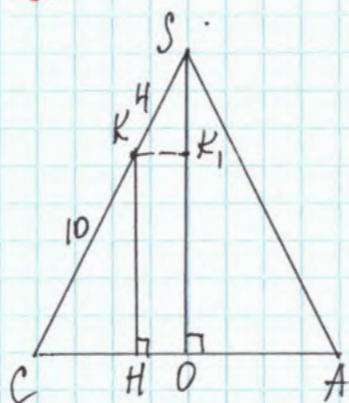
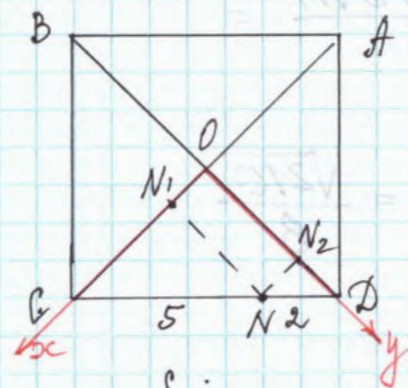
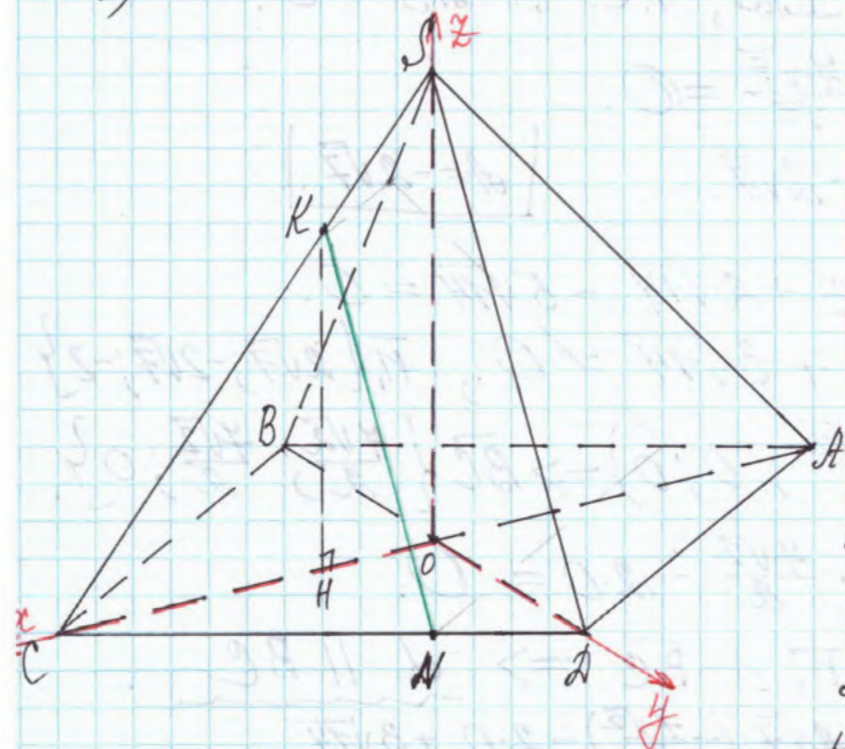
$$B = \sqrt{7}C$$

$$\sqrt{2} \cdot A + \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{2}C + D = 0$$

$$D = -\sqrt{2}A - \frac{5\sqrt{14}}{2}C$$

$$\text{Пусть } C=2, \text{ тогда } B=2\sqrt{7}; D=-\sqrt{2}A-5\sqrt{14}$$

$$\alpha: Ax + 2\sqrt{7}y + 2z - \sqrt{2}A - 5\sqrt{14} = 0, \vec{n} \{A; 2\sqrt{7}; 2\}$$



$S(0;0;\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}), A(-\frac{7\sqrt{2}}{2};0;0) \Rightarrow \overline{AS} \left\{ \frac{7\sqrt{2}}{2};0;\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right\}$
 See $\alpha \parallel \overline{AS}$, so $\vec{n} \perp \overline{AS}$, i.e. $\vec{n} \cdot \overline{AS} = 0$.

$$A \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{7} \cdot 0 + 2 \cdot \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = 0.$$

$$A = -\frac{2 \cdot 7\sqrt{7} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}} = -2\sqrt{7}. \quad \boxed{A = -2\sqrt{7}}$$

$$\alpha: -2\sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 2z + 2\sqrt{14} - 5\sqrt{14} = 0.$$

$$\alpha: 2\sqrt{7}x - 2\sqrt{7}y - 2z + 3\sqrt{14} = 0, \quad \vec{n}_1 \{2\sqrt{7}; -2\sqrt{7}; -2\}$$

$$B(0; -\frac{7\sqrt{2}}{2}; 0), C(\frac{7\sqrt{2}}{2}; 0; 0) \Rightarrow \overline{BC} \left\{ \frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2}; 0 \right\}.$$

$$\vec{n}_1 \cdot \overline{BC} = 2\sqrt{7} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{7} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot 0 = 0.$$

i.e. $\vec{n}_1 \cdot \overline{BC} = 0$, so $\vec{n}_1 \perp \overline{BC} \Rightarrow \alpha \parallel \overline{BC}$.

$$\delta) p(B; \alpha) = \frac{2\sqrt{7} \cdot 0 - 2\sqrt{7} \cdot (-\frac{7\sqrt{2}}{2}) - 2 \cdot 0 + 3\sqrt{14}}{\sqrt{(2\sqrt{7})^2 + (-2\sqrt{7})^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{14} + 3\sqrt{14}}{\sqrt{28+28+4}} = \frac{10\sqrt{14}}{2\sqrt{15}} = \frac{5 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{210}}{3}.$$

$$p(B; \alpha) = \frac{\sqrt{210}}{3}$$

Answer: $\delta) \frac{\sqrt{210}}{3}$

Задание №14.4. Ответы.

1) $\frac{7}{2}$.

2) 30° .

3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{136}}{136}\right)$.

5) 6.

6) $\sqrt{5}$.

7) $\frac{\sqrt{210}}{3}$.

Задание №14.4 (ДЗ). Четырехугольные пирамиды.

- 1) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно 3, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. На ребрах AB и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $PA = QC = 1$.
- а) Докажите, что плоскость PQS перпендикулярна ребру SD .
- б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости PQS .
- 2) В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 6$. Точка M — середина ребра AD . Известно, что $SA = SD = 4$, $SB = 5$.
- а) Докажите, что SM — высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью CSD .
- 3) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а высота равна $4\sqrt{7}$. На ребрах AB , SB и SC отмечены точки K , M и N соответственно, причем $AK = 2$ и $SM = SN = 3$.
- а) Докажите, что плоскости KMN и ASD параллельны.
- б) Найдите расстояние от точки N до плоскости ASD .
- 4) Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 10$, $BC = 5\sqrt{2}$. Боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно 10. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BP и DQ на ребро SC .
- а) Докажите, что точка P — середина CQ .
- б) Найдите угол между плоскостями SBC и SCD .
- 5) В основании пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Прямые AB и CD пересекаются в точке K , точка M — середина AD . Известно, что $AD = 2KM$, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания.
- а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .
- б) Найдите объем пирамиды $PAKM$, если высота пирамиды $PABCD$ равна 1, $BC = 2$, $AB = 3$, $CD = 4$.
- 6) На ребре AS правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причем $AQ : QS = 2 : 1$. Точка P — середина ребра AB .
- а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 3.
- 7) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребре SB взята точка K так, что $SK : KB = 1 : 3$. Точки M и N — середины ребер CD и SC соответственно.
- а) Докажите, что плоскость KMN параллельна прямой AC .
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости KMN если $AB = 2\sqrt{2}$, $SA = 4$.

Задание №14.4 (ДЗ). Ответы.

1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2) $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}$.

3) $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

4) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$.

5) 1,96.

6) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

7) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задание №14.5. Треугольные пирамиды.

1) (ЕГЭ-2015)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от вершины C .
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

2) (ЕГЭ-2016)

В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны. $AB = BD = CD = AC = 5$.

- Докажите, что $AD = BC$.
- Найдите объем пирамиды $ABCD$, если двугранные углы при ребрах AD и BC равны 60° .

3) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а высота равна 1.

На ребрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

4) (ЕГЭ-2017)

На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

5) (ЕГЭ-2017)

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объем пирамиды $PABC$.

6) (ЕГЭ-2018)

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно. На ребре SA отмечена точка K . Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырехугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q .

- Докажите, что точка Q лежит на высоте пирамиды.
- Найдите угол между плоскостями MNK и ABC , если $AB = 6$, $SA = 12$, $SK = 6$.
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNK , если $AB = 12$, $SA = 15$, $SK = 6$.

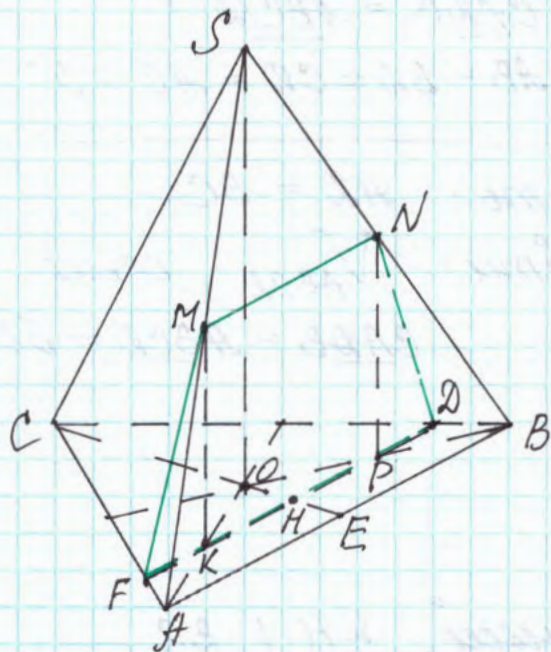
7) (ЕГЭ-2019)

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

- Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
- Найдите расстояние между ребрами BC и SA .

14.5. Треугольные пирамиды.

1) ЕГЭ-2015



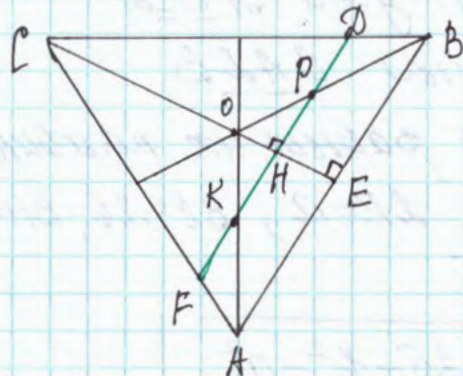
Дано: $SABC$ - правильная пирамида
 $AB = 30$; $SA = 28$.
 M - середина SA
 N - середина SB
 α - плоскость сечения
 $MN \subset \alpha$, $\alpha \perp (ABC)$
 CE - медиана $\triangle ABC$

а) Док-ть: $CH:HE = 5:1$, где
 $H = CE \cap \alpha$.

б) Найти: объем пирамиды,
 с вершиной S и
 основанием - сечение.

а) Строим сечение: $MK \perp (ABC)$; $NP \perp (ABC)$;
 $KP \cap AC = F$; $KP \cap BC = D$; MN ; MF ; ND ; FD .

$MNDF$ - искомое сечение (равнобедренная трапеция).



N - середина SB , $NP \perp BO \Rightarrow P$ - середина BO .
 M - середина SA , $MK \perp AD \Rightarrow K$ - середина AD .

KP - средняя линия $\triangle AOB \Rightarrow KP \parallel AB$.

$$OH = HE, HE = \frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} CE = \frac{1}{6} CE.$$

$$CH = CE - \frac{1}{6} CE = \frac{5}{6} CE.$$

$$\underline{CH:HE = \frac{5}{6} : \frac{1}{6} = 5:1, \text{ з.т.д.}}$$

б) Пирамида $SMNDF$: S - вершина, CH - высота,
 $MNDF$ - основание. $V_{SMNDF} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNDF} \cdot CH$.

$$AB = 30, MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15; FD = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25.$$

MK - высота трапеции; $MK = \frac{1}{2} SO$.

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}; SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{28^2 - (10\sqrt{3})^2} = 22$$

$$MK = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11. S_{MNDF} = \frac{MN + FD}{2} \cdot MK = \frac{15 + 25}{2} \cdot 11 = 220$$

$$CH = \frac{5}{6} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 220 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{2750\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{2750\sqrt{3}}{3}$

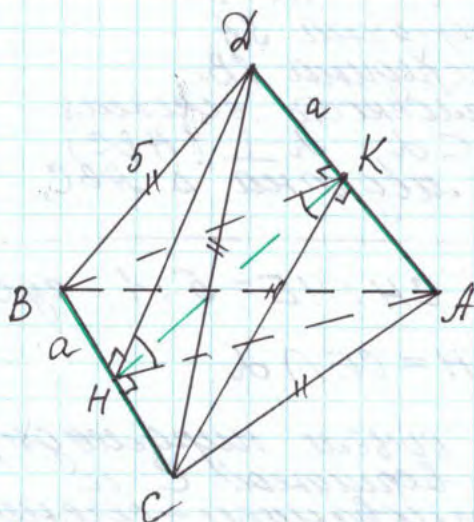
14.5.

Треугольные пирамиды.

2) ЕГЭ - 2016

Дано: $ABCD$ - пирамида
 $\angle ADB = \angle ABC$

$$AB = BD = CD = AC = 5$$

а) Док-ть: $AD = BC$ б) Найти: V_{ABCD} , если
 $\angle ADB = \angle ABC = 60^\circ$

а) $BD = CD$, $\triangle BCD$ - равнобедренный, $DH \perp BC$,
 DH - медиана и биссектриса, H - середина BC .
 $AB = AC$, $\triangle BCA$ - равнобедренный, H - середина BC ,
 $AH \perp BC$. Тогда $\angle DHA$ - линейный угол $\angle BCD$.

Аналогично: $\angle SKB$ - линейный угол $\angle ADB$.

По условию $\angle DHA = \angle SKB$, значит равны их половины.
 Поэтому, $\triangle BKH = \triangle DHK$ по катету HK и
 прилежащему острому углу. Значит $BH = DK$,
 $BC = AD$.

б) Пусть $DK = BH = a$, $\angle BKC = 60^\circ$ (по условию)

$$\angle BKH = 30^\circ, \quad BK = 2a.$$

$$\text{Из } \triangle BKC: BK = \sqrt{5^2 - a^2} = \sqrt{25 - a^2} \quad \Rightarrow$$

$$2a = \sqrt{25 - a^2}; \quad 4a^2 = 25 - a^2; \quad 5a^2 = 25; \quad a^2 = 5; \quad a = \sqrt{5}.$$

$$AD = BC = 2\sqrt{5}, \quad BK = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Разобьем пирамиду $ABCD$ на две равные

пирамиды: $DBKC$ и $ABKC$. $V_{ABCD} = 2V_{DBKC} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{DBKC} \cdot DK$

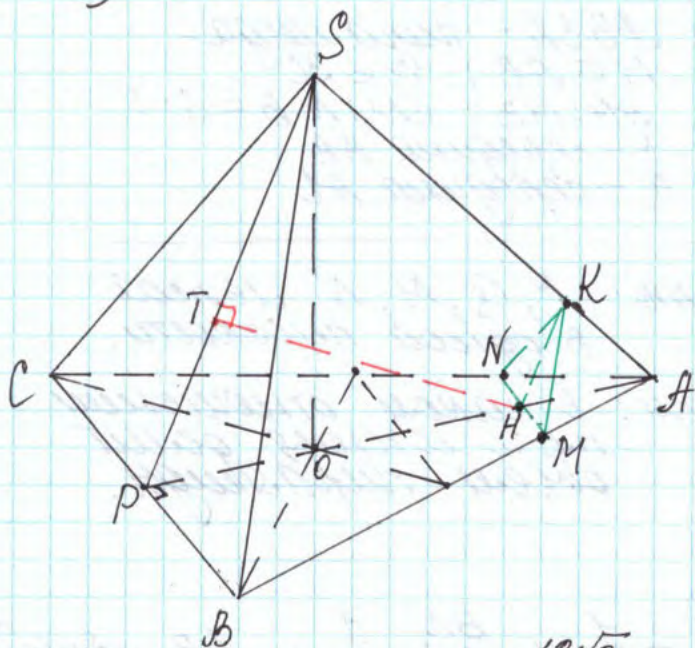
$$V_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{5} = \frac{10\sqrt{15}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{10\sqrt{15}}{3}$

14.5.

Треугольные пирамиды

3) ЕГЭ - 2016



Дано: $SABC$ - правильная пирамида
 $AB = 12$; $SO \perp (ABC)$; $SO = 1$
 $M \in AB$; $N \in AC$; $K \in AS$
 $AM = AN = 3$
 $AK = \frac{7}{4}$

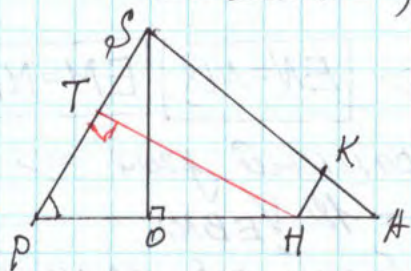
а) Док-ть: $(MNK) \parallel (SBC)$ б) Найти: $\rho(K; (SBC))$

а) $AB = 12$; $AP = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$; $AO = \frac{2}{3} \cdot AP = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
 $\triangle SOA$: $SO = 1$; $AO = 4\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{1^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 48} = 7$.
 $AK = \frac{7}{4}$; $SA = 7 \Rightarrow SK = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$, $\frac{AK}{SK} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{1}{3}$
 т.е. $AK = \frac{1}{4} AS$.

$\triangle ABC$: $AB = 12$, $AM = 3 \Rightarrow AM = \frac{1}{4} AB$ и $AN = \frac{1}{4} AB$.

$\triangle AMK \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и равному углу, значит $KM \parallel SB$.
 Аналогично, $KN \parallel SC$ и $MN \parallel BC$,
 поэтому $(MNK) \parallel (SBC)$.

б) $\rho(K; (SBC)) = \rho(H; (SBC)) = HT$, где $H = AP \cap (MNK)$,
 $HT \perp SP$, $KH \parallel SP$, $AH = \frac{1}{4} AP = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



$PH = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $OP = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

$\cos \angle SPA = \frac{SP^2 + AP^2 - SA^2}{2 \cdot SP \cdot AP} = \frac{13 + 108 - 49}{2\sqrt{13} \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{39}}$

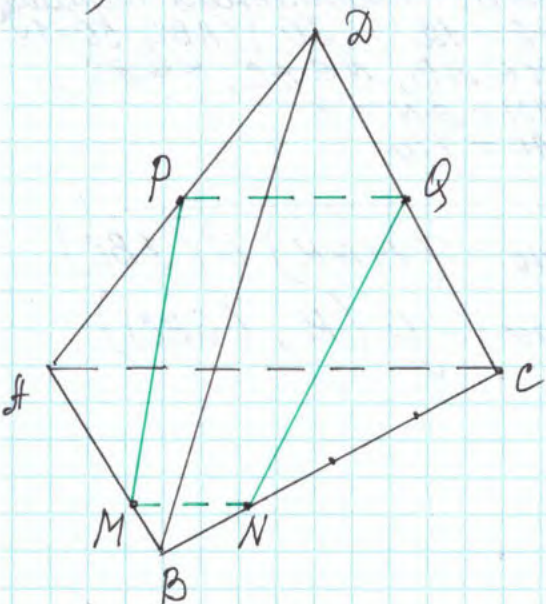
$\sin \angle SPA = \sqrt{1 - \frac{36}{39}} = \sqrt{\frac{3}{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \sin \angle TPH$.

$\triangle PHT$: $HT = PH \cdot \sin \angle TPH = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{39}}{26}$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{39}}{26}$

14.5. Треугольные пирамиды

4) ЕГЭ - 2014



Дано: $ABCD$ - пирамида
 $M \in AB$; $N \in BC$
 $AM:MB = CN:NB = 3:1$
 P - середина AD
 Q - середина DC

- а) Док-ть: P, Q, M, N лежат в одной плоскости.
 б) Найти: в каком отношении пл-ть сечения делит объем пирамиды.

а) $\triangle BMN \sim \triangle BAC$, т.к. $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{4}$ и $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{4}$ и $\angle B$ - общий.
 Значит $MN \parallel AC$.

PQ - средняя линия $\triangle ADC$, значит $PQ \parallel AC$.

$MN \parallel AC$
 $PQ \parallel AC$ $\Rightarrow MN \parallel PQ \Rightarrow P, Q, M, N$ лежат в одной плоскости.

б) $PQNM$ - сечение пирамиды.

Пусть V - объем пирамиды

V_1 - объем верхней части; V_2 - объем нижней части

$\triangle DBC$ и прямая QN ($QN \cap DE = E$) по теореме Менелая:

$$\frac{QE}{EB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1; \frac{QE}{EB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1; \frac{QE}{EB} = 3 \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{2}{1}$$

$\triangle DEQ$ и прямая BC по теореме Менелая:

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EN}{NQ} \cdot \frac{QC}{CD} = 1; \frac{2}{1} \cdot \frac{EN}{NQ} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{EN = NQ} \quad \boxed{EM = MP}$$

Пирамиды $EMNB$ и $EPQD$ имеют общий трехгранный угол $\Rightarrow$

$$V_{EMNB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_{EPQD} = \frac{1}{12} V_{EPQD} \Rightarrow V_{EPQD} = 12 V_{EMNB}$$

Пирамиды $DABC$ и $DPEQ$ тоже имеют общий трехгр. угол $\Rightarrow$

$$V_{DPEQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{DABC} = \frac{3}{8} V_{DABC} = \frac{3}{8} V; 12 V_{EMNB} = \frac{3}{8} V \Rightarrow V_{EMNB} = \frac{1}{32} V$$

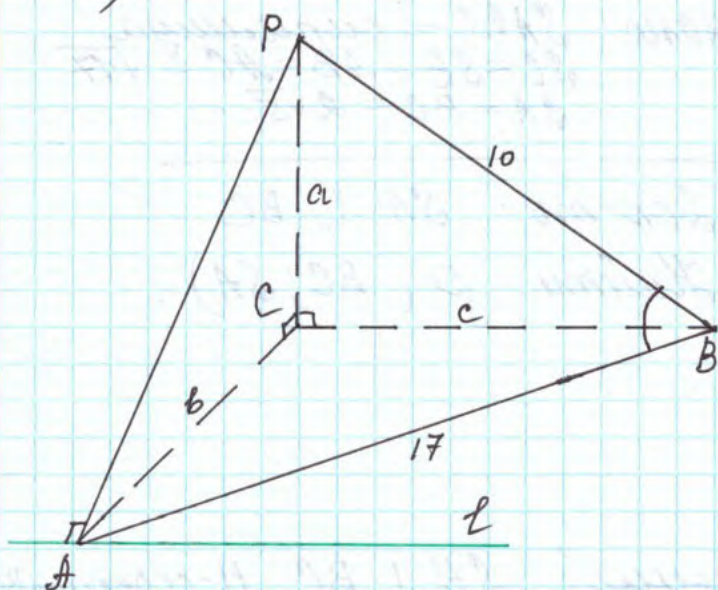
Значит $V_1 = \frac{3}{8} V - \frac{1}{32} V = \frac{11}{32} V$, $V_2 = V - \frac{11}{32} V = \frac{21}{32} V$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{11 \cdot 32}{32 \cdot 21} = \frac{11}{21}$$

Ответ: б) $\frac{11}{21}$

14.5. Треугольные пирамиды

5) ЕГЭ-2017



Дано: $PABC$ - пирамида
 $\triangle ABC$ - основание
 $AB = 17$, $PB = 10$

$$\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$$

PC - высота пирамиды
 $PA \perp BC$

а) Док-ть: $\triangle ABC$ - прямоугольный

б) Найти: V_{PABC}

а) PC - высота пирамиды, значит $PC \perp BC$ и $PC \perp AC$.
 Проведем через точку A прямую l : $l \parallel BC$.

$$PA \perp BC, BC \parallel l \Rightarrow PA \perp l.$$

По теореме о трех перпендикулярах $l \parallel AC \Rightarrow BC \perp AC$,
 т.е. $\angle BCA = 90^\circ$, $\triangle ABC$ - прямоугольный.

б) $\triangle ABP$: $AP = \sqrt{AB^2 + PB^2 - 2 \cdot AB \cdot PB \cdot \cos \angle PBA}$ по теореме косинусов

$$AP = \sqrt{17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \frac{32}{85}} = \sqrt{289 + 100 - 128} = \sqrt{261}$$

Пусть $PC = a$, $AC = b$, $BC = c$, тогда

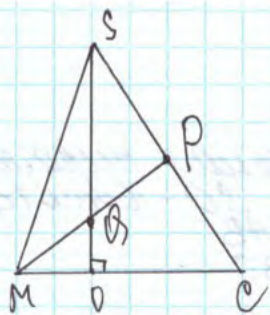
$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 100 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a^2 + b^2 + c^2) = 650 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 325 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 225 \\ c^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 15 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$V_{PABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PC = \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot c}{2} \cdot a = \frac{6 \cdot 15 \cdot 8}{6} = 120$$

$$\boxed{V_{PABC} = 120}$$

Ответ: б) 120



Для $\triangle SMC$ и прямой MP по теореме Менелая:

$$\frac{SQ}{QO} \cdot \frac{OM}{MC} \cdot \frac{CP}{PS} = 1; \quad \frac{SQ}{QO} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{SQ}{QO} = 3}$$

$$SC = 12, CO = 2\sqrt{3} \Rightarrow SO = \sqrt{12^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{144 - 12} = \sqrt{132}$$

$$OQ = \frac{1}{4} SO = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{132} = \frac{2\sqrt{33}}{4} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\angle QHO = \frac{OQ}{OH} = \frac{\sqrt{33} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{33}{3}} = \sqrt{11}$$

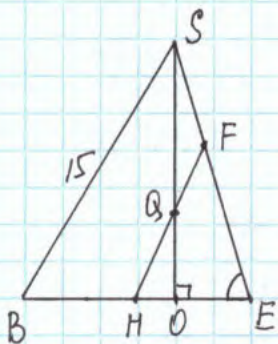
$$(\angle MNK; \angle ABC) = \arctg \sqrt{11} \quad (\text{или } \arccos \frac{\sqrt{3}}{6})$$

2) $AB = 12; SA = 15; KC = 6.$

$$MN = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

$$\frac{KP}{AC} = \frac{SK}{SA}; \quad \frac{KP}{12} = \frac{6}{15} \Rightarrow KP = 4,8$$

$HQ \cap SE = F$, FH высота трапеции $KMNP$.



$$BE = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad BH = HE = 3\sqrt{3}$$

$$OE = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}; \quad BO = 4\sqrt{3}$$

$$SO = \sqrt{15^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{225 - 48} = \sqrt{177}$$

$$SE = \sqrt{177 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{177 + 12} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}.$$

$$\frac{SF}{SE} = \frac{SK}{SA}; \quad \frac{SF}{SE} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; \quad SF = \frac{2}{5} SE, \quad FE = \frac{3}{5} SE = \frac{3 \cdot 3\sqrt{21}}{5} = \frac{9\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos \angle E = \frac{OE}{SE} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{21}} = \frac{2}{3\sqrt{7}}$$

$\triangle HFE$: по теореме косинусов $HF = \sqrt{HE^2 + FE^2 - 2 \cdot HE \cdot FE \cdot \cos \angle E}$

$$HF = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{9\sqrt{21}}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 2}{5 \cdot 3\sqrt{7}}} = \sqrt{27 + \frac{81 \cdot 21}{25} - \frac{2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27 \cdot 25 + 81 \cdot 21 - 20 \cdot 27}{25}} = \sqrt{\frac{27(25 + 63 - 20)}{25}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 68}{25}} = \frac{6\sqrt{51}}{5}.$$

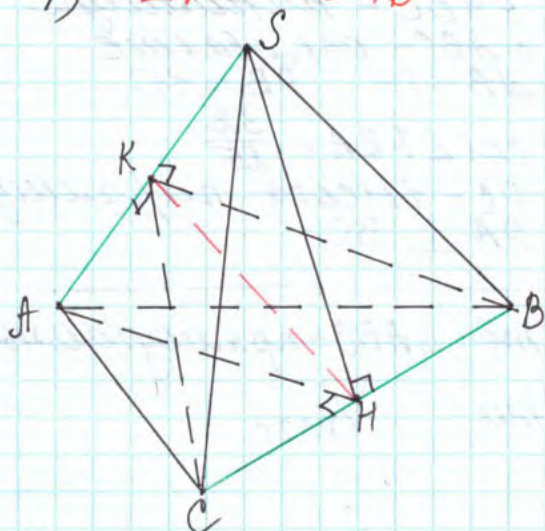
$$S_{KMNP} = \frac{MN + KP}{2} \cdot HF = \frac{6 + 4,8}{2} \cdot \frac{6\sqrt{51}}{5} = \frac{10,8 \cdot 3\sqrt{51}}{5} = \frac{162\sqrt{51}}{25}$$

Ответ: $\delta_1) \arctg \sqrt{11}$
($\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$)

$\delta_2) \frac{162\sqrt{51}}{25}$

14.5. Треугольные пирамиды

7) ЕГЭ-2019

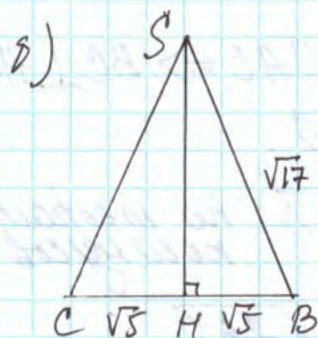


Дано: $SABC$ - пирамида
 $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$
 $SA = BC = 2\sqrt{5}$

а) док-ть: $SA \perp BC$

б) Найти: $\rho(BC; SA)$.

а) $SC = SB$, $\triangle SBC$ - равнобедренный, $SH \perp BC$, H - середина BC .
 $AC = AB$, $\triangle ABC$ - равнобедренный, AH - медиана, $AH \perp BC$.
 $BC \perp SH$ и $BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow \underline{BC \perp SA}$.



$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{17 - 5} = \sqrt{12}.$$

$$AH = SH = \sqrt{12}.$$



$$HK = \sqrt{SH^2 - SK^2} = \sqrt{12 - 5} = \sqrt{7}.$$

$\rho(BC; SA) = HK$, т.к.

$BC \perp (SAH)$, $KH \subset (SAH) \Rightarrow BC \perp KH$.

$SA \perp KH$, HK - высота $\triangle ASH$.

HK - общий перпендикуляр BC и SA .

$$\rho(BC; SA) = \sqrt{7}.$$

Ответ: б) $\sqrt{7}$.

Задание №14.5. Ответы.

1) $\frac{2750\sqrt{3}}{3}$.

2) $\frac{10\sqrt{15}}{3}$.

3) $\frac{9\sqrt{39}}{26}$.

4) $21 : 11$.

5) 120 .

6.1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; 6.2) $\frac{162\sqrt{51}}{25}$.

7) $\sqrt{7}$.

Задание №14.5 (ДЗ). Треугольные пирамиды.

1) В правильном тетраэдре $SABC$ на ребрах SA , SB и BC отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AB = 9$, $AM = BN = 6$ и $BK = 2$.

а) Докажите, что плоскость MNK перпендикулярна плоскости ABC .

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью MNK .

2) В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AC = BC$ и $AD = BD$.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите объем пирамиды $ABCD$, если двугранный угол при ребре CD равен 90° , $AC = 3$, $AD = 4$, $CD = 5$.

3) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а высота равна 2.

На ребрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = AN = 2$ и $AK = \frac{4}{3}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

4) На ребрах AD и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно, причем $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Точки M и N — середины ребер AB и CD соответственно.

а) Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

5) В треугольной пирамиде $PABC$ известно, что $AP = BP = CP$. Основанием высоты этой пирамиды, опущенной из вершины P является середина ребра AB .

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$, если известно, что $AC = AP = 8$, $\cos \angle APB = \frac{7}{32}$.

6) В правильном тетраэдре $SABC$ ребро равно 20. На ребрах AB , AS и CS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = AN = 5$, а $BK = 8$.

а) Докажите, что центр грани ABC принадлежит плоскости MNK .

б1) Найдите угол между плоскостями MNK и BCS .

б2) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью MNK .

7) В треугольной пирамиде $SABC$ отмечены точки пересечения медиан граней ASB и BSC — точки M и N , соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна плоскости ABC .

б) Найдите расстояние между прямыми MN и BC , если все ребра пирамиды $SABC$ равны 6.

Задание №14.5 (ДЗ). Ответы.

1) $35\sqrt{2}$.

2) 4, 8.

3) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

4) 1 : 1 (пополам).

5) $8\sqrt{39}$.

6) $\arccos \frac{7\sqrt{249}}{249}$; 6.2) $\frac{39\sqrt{83}}{4}$.

7) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Задание №14.6. Тела вращения.

1) (ЕГЭ-2018)

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B , на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1 , если $AB = 8$, $B_1C_1 = 15$.

2) (ЕГЭ-2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , на окружности другого основания — точка C_1 , причем CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

- Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .
- Найдите объем цилиндра.

3) (ЕГЭ-2019)

Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причем прямая MN параллельна образующей конуса SB .

- Докажите, что угол ANO — прямой.
- Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

4) Диаметр окружности основания цилиндра равен 34, образующая цилиндра равна $4\sqrt{6}$. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам длины 16 и 30. Расстояние между этими хордами равно 25.

- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от плоскости α .
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

5) Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

- Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
- Найдите расстояние от плоскости этого сечения до центра основания конуса.

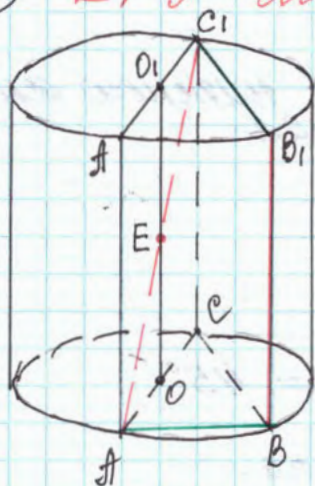
6) В куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4 вписана сфера. Точка M — середина ребра DD_1 . Плоскость α параллельна прямой AC и проходит через точки B и M .

- Постройте сечение куба плоскостью α .
- Найдите длину линии пересечения плоскости α и вписанной в куб сферы.

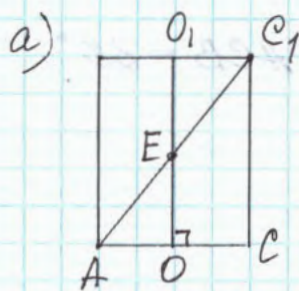
14.6.

Тела вращения

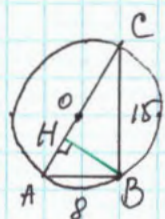
1) ЕГЭ-2018



Дано: цилиндр, OO_1 - ось
 A и B на окр-ти нижнего основ.
 BB_1 - образующая
 $AC_1 \cap OO_1 = E$
 B_1 и C_1 на окр-ти верхнего основ.

а) Док-ть: $AB \perp B_1C_1$ б) Найти: $\rho(AC_1; BB_1)$, если
 $AB = 8$; $B_1C_1 = 15$.

AC_1 пересекает ось цилиндра и C_1 лежит на окружности верхнего основания, то C_1 и A симметричны относительно середины OO_1 точки E .



Из точки C_1 опустим перпендикуляр на основание, CC_1 - образующая, AC диаметр
 $BC \parallel B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$.

$\angle ABC$ - вписанный, опирается на диаметр,

значит $\angle ABC = 90^\circ$, поэтому $AB \perp BC \Rightarrow \underline{AB \perp B_1C_1}$.

б) $AB = 8$, $B_1C_1 = 15$, $BC = 15$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17.$$

$BB_1 \parallel (ACC_1)$, т.к. $BB_1 \parallel OO_1$ и $OO_1 \subset (ACC_1)$, поэтому
 $\rho(AC_1; BB_1) = \rho(BB_1; (ACC_1)) = \rho(B; (ACC_1)) = \rho(B; AC) = BH$,
 где $BH \perp AC$.

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot BH}{2} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC}$$

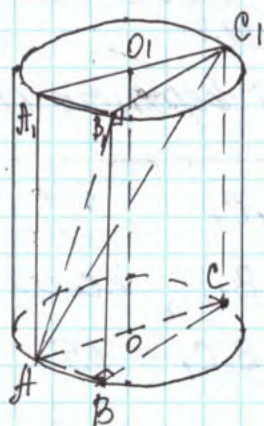
$$BH = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}$$

$$\rho(AC_1; BB_1) = \frac{120}{17}$$

Ответ: б) $\frac{120}{17}$

14.6. Тема вращения

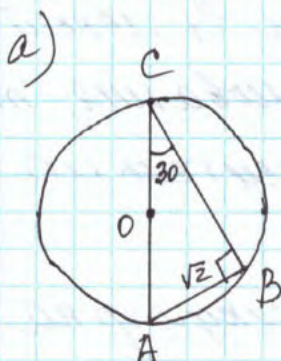
2) ЕГЭ-2018



Дано: цилиндр
 A, B, C - на окр-ти нижнего основания
 CC_1 - образующая
 AC - диаметр
 $\angle ACB = 30^\circ$
 $AB = \sqrt{2}$
 $CC_1 = 2$

а) Док-ть: $(AC_1; BC) = 45^\circ$

б) Найти: $V_{\text{цилиндра}}$.



AC - диаметр, $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle ACB = 30^\circ$

$$AB = \sqrt{2}, AC = 2 \cdot AB = 2\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}.$$

$$\Delta ACC_1: AC = 2\sqrt{2}; CC_1 = 2$$

$$AC_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{8+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$(AC_1; BC) = (AC_1; B, C_1) = \angle AC_1 B,$$

$$\Delta ABB_1: AB_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

$$\Delta AB_1C_1: B_1C_1 = \sqrt{6}; AB_1 = \sqrt{6}, AC_1 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Проверим: } AC_1^2 = B_1C_1^2 + AB_1^2 ?$$

$$AC_1^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12; B_1C_1^2 + AB_1^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 = 12$$

Равенство выполняется, значит $\angle AB_1C_1 = 90^\circ$,
 а катеты равны, поэтому $\angle AC_1B_1 = 45^\circ$.

б) $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi R^2 \cdot CC_1$

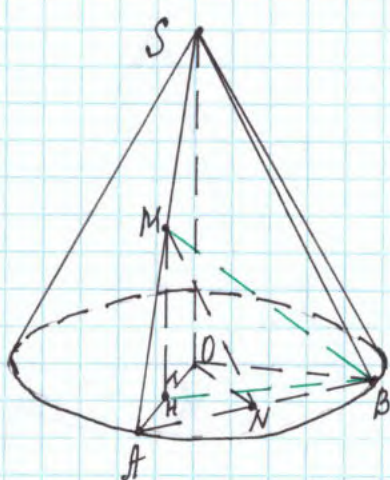
$$AC = 2\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{2}, CC_1 = 2.$$

$$V = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = 4\pi$$

Ответ: б) 4π

14.6. Тема вращения

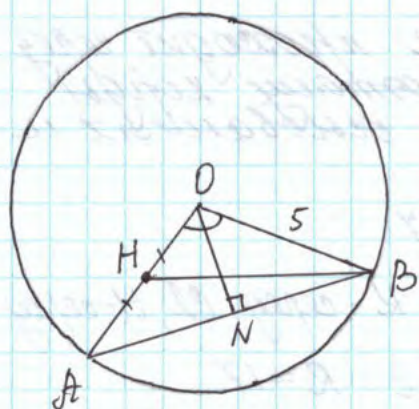
3) ЕГЭ-2019



Дано: конус, S - вершина
 SO - высота, $SO = \sqrt{51}$
 R - радиус основания, $R = 5$
 SA, SB - образующие
 N лежит в центре осев.
 M - середина SA
 $MN \parallel SB$.

а) Док-ть: $\angle ANO = 90^\circ$

б) Найти: $(BM; (AOB))$, если $AB = 8$.



а) $SA = SB$, образующие конуса равны
 M - середина SA , $MN \parallel SB$, значит
 MN - средняя линия $\triangle ASB$,
 N - середина AB .

$\triangle AOB$ равнобедренный, $AO = OB = R$
 ON - медиана $\Rightarrow ON$ - высота, т.е.
 $\angle ANO = 90^\circ$.

б) $MH \perp (AOB)$; $MH \perp AO$, H - середина AO

$$MH = \frac{1}{2} SO = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$\triangle AOB: \cos \angle O = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$$

$$\cos \angle O = \frac{25 + 25 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{-14}{2 \cdot 25} = \frac{-7}{25}$$

$$\triangle OBH: BH = \sqrt{OB^2 + OH^2 - 2 \cdot OB \cdot OH \cdot \cos \angle O}$$

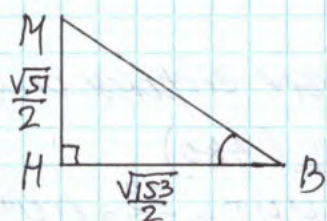
$$BH = \sqrt{25 + \frac{25}{4} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{125}{4} + 7} = \frac{\sqrt{153}}{2}$$

$$(BM; (AOB)) = (BM; BH) = \angle MBH.$$

$$\operatorname{tg} \angle MBH = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{2}}{\frac{\sqrt{153}}{2}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

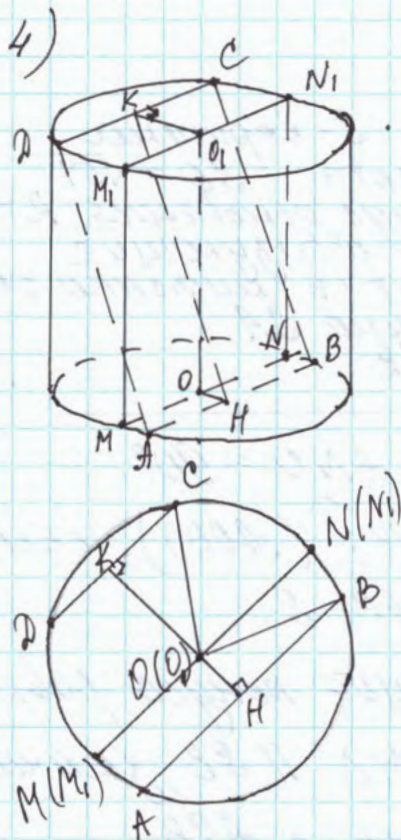
$$\angle MBH = 30^\circ$$

Ответ: б) 30°



14.6.

Тема вращения



Дано: цилиндр
 MN - диаметр, $MN = 34$
 MM_1 - образующая, $MM_1 = 4\sqrt{6}$
 $AB = 30$, $CD = 16$
 α - плоскость сечения
 $AB \subset \alpha$, $CD \subset \alpha$
 O и O_1 - центры оснований
 $\rho(AB; CD) = 25$

а) Док-ть: O и O_1 по разные стороны от α .

б) Най-ти: $(\alpha; \angle(ABO))$

а) Плоскость сечения проходит через хорды AB и CD , поэтому хорды лежат в разных основаниях и $AB \parallel CD$.

$$MN = 34, MO = R = 17.$$

$O, K \perp CD$; $OH \perp AB$; K - серед. CD , H - серед. AB .

$$\triangle O_1KC: KC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8; O_1C = R = 17$$

$$O_1K = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\boxed{O_1K = 15}$$

$$\triangle OHB: BH = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15; OB = R = 17$$

$$OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\boxed{OH = 8}$$

$$\rho(AB; CD) = KH = 25.$$

1) Если O и O_1 по разные стороны от α :

$$\triangle KPH: KP = 15 + 8; PH = 4\sqrt{6}; KH = 25$$

$$23^2 + (4\sqrt{6})^2 = 25^2; 529 + 96 = 625 \text{ верно.}$$

2) Если O и O_1 по одну сторону от α :

$$\triangle KPH: KR = 15 - 8 = 7; KH = 25; PH = 4\sqrt{6}$$

$$7^2 + (4\sqrt{6})^2 = 25^2; 49 + 96 = 625 \text{ неверно.}$$

Значит точки O и O_1 находятся по разные стороны от α .

б) $(\alpha; \angle(ABO)) = (KH; \angle(ABO)) = \angle KHT$, где $KT \perp (ABO)$.

$$\triangle KTH: KT = 4\sqrt{6}; KH = 15 + 8 = 23; KN = 25; \cos \angle KHT = \frac{23}{25} = 0,92.$$

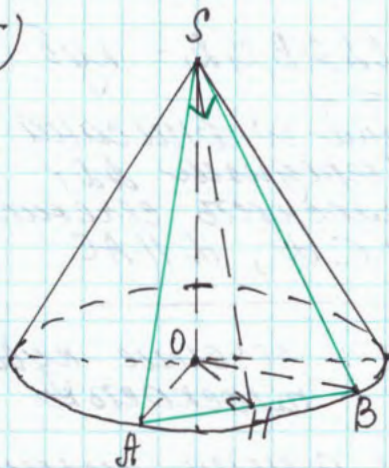
$$(\alpha; \angle(ABO)) = \arccos 0,92$$

Ответ: б) $\arccos 0,92$

14.6.

Тема вращения

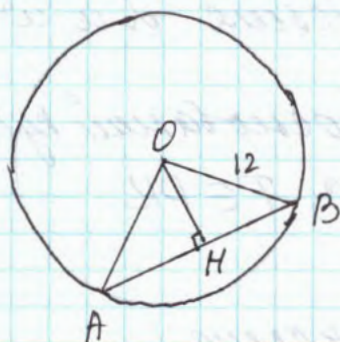
5)



Дано: конус S - вершина
 $R=12$, R - радиус основания
 $SO=5$, SO - высота
 SA и SB - образующие
 $SA \perp SB$

а) Построить: сечение конуса, проходящее через S и SA, SB .

б) Найти: $\rho(O; \alpha)$.



а) б) AB - хорда, $OA = OB = R = 12$, $OH \perp AB$

$\triangle SOA$: $SO = 5$, $OA = 12$

$$SA = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$SA = SB = 13.$$

$\triangle SAB$ - прямоугольный и равнобедренный.

$$AB = 13\sqrt{2}, \quad AH = BH = \frac{13\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle OHB$: $OH = \sqrt{OB^2 - HB^2}$

$$OH = \sqrt{12^2 - \left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - \frac{169}{2}} = \sqrt{\frac{119}{2}} = \frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}}$$

$\triangle SOH$: $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2}$

$$SH = \sqrt{5^2 + \left(\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{119}{2}} = \sqrt{\frac{169}{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

$OK \perp SH$.

$\rho(O; \alpha) = \rho(O; (SAB)) = OK$ - искоемое расстояние

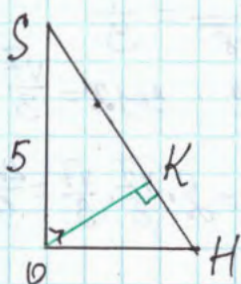
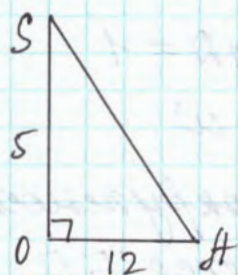
$$S_{OHS} = \frac{SO \cdot OH}{2} = \frac{SH \cdot OK}{2} \Rightarrow OK = \frac{SO \cdot OH}{SH}$$

$$OK = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}}}{\frac{13}{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{119}}{13}$$

$$\boxed{\rho(O; \alpha) = \frac{5\sqrt{119}}{13}}$$

$\triangle SAB$ - искоемое сечение конуса плоскостью α , т.к. проходит через S и через две взаимно перпендикулярные образующие SA и SB .

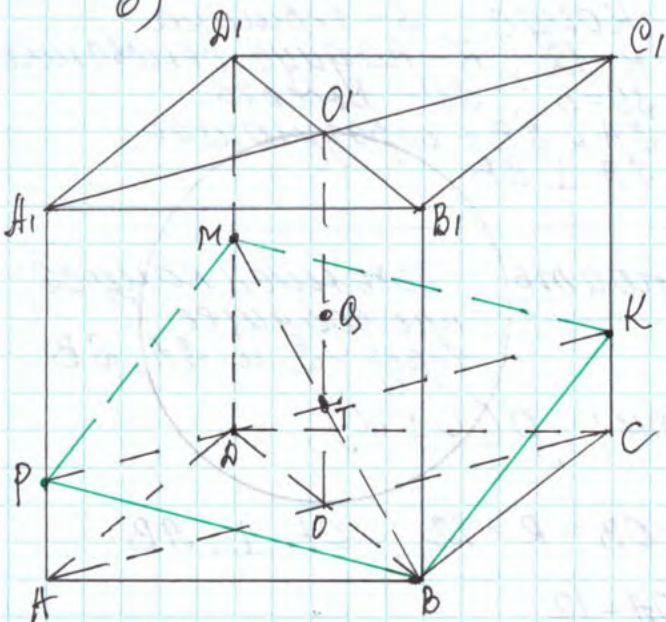
Ответ: б) $\frac{5\sqrt{119}}{13}$



14.6.

Тела вращения

6)



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $AB = 4$
 Сфера ω вписана в куб
 M - середина AA_1
 α - плоскость сечения
 $BM \subset \alpha$, $\alpha \parallel AC$

а) Построить: сечение куба плоскостью α

б) Найти: длину линии пересечения α и ω

а). O и O_1 - центры оснований куба

$MB \cap OO_1 = T$, $PK \parallel AC$, $T \in PK$

$K \in CC_1$, $P \in AA_1$

$MKNP$ - искомое сечение.

б) $DD_1 = 4$, $MD = 2$, $OT = \frac{1}{2} MD = 1$

$R = \frac{1}{2} OO_1 = 2$, Q - центр ω .

α и ω пересекаются по окружности, диаметром которой является EF .

$$AB = 4\sqrt{2}; OD = OQ = 2\sqrt{2}, QT = 1. \sin \angle QMT = \frac{QT}{MT} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3}$$

$$\triangle MEQ: \frac{2}{\sin \angle QME} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \angle MEQ}; \sin \angle MEQ = \frac{\sqrt{2}}{3} = \sin x; \cos x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\angle EQF$ - центральный, $\angle EQF = 180^\circ - 2x$.

$\angle ELF$ - вписанный, $\angle ELF = \frac{1}{2} \angle EQF = 90^\circ - x$.

Вместо L можно взять O_1

$\triangle ELF$ - вписан в окружность, значит

$$\frac{EF}{\sin \angle ELF} = 2R; EF = 2R \cdot \sin(90^\circ - x) = 2R \cdot \cos x = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$\boxed{EF = \frac{4\sqrt{7}}{3}}$$

$$C = \pi d$$

$$C = \frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$$

длина линии пересечения α и ω .

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{7} \cdot \pi}{3}$

Задание №14.6. Ответы.

1) $\frac{120}{17}$.

2) 4π .

3) 30° .

4) $\arccos 0,92$.

5) $\frac{5\sqrt{119}}{13}$.

6) $\frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$.

Задание №14.6 (ДЗ). Тела вращения.

1) В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B , на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая AC_1 пересекает ось цилиндра.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 9$, $B_1C_1 = 12$, $BB_1 = 4$.

2) В цилиндре на окружности нижнего основания выбраны точки A , B и C так, что $AC = BC$, AB — диаметр основания. Точка O_1 — центр верхнего основания цилиндра, на окружности этого основания выбрана точка C_1 так, что CC_1 — образующая цилиндра, перпендикулярная основаниям. Известно, что $\cos \angle AC_1B = 0,6$.

а) Докажите, что треугольник AO_1B — равносторонний.

б) Найдите объем цилиндра, если $CC_1 = \sqrt{6}$.

3) Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. На окружности основания конуса отмечены точки A и B . Точка M — середина отрезка SA , а на отрезке AB отмечена точка N так, что и $\angle ANO = 90^\circ$.

а) Докажите, что прямые MN и SB параллельны.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 10$.

4) Диаметр окружности основания цилиндра равен 10, образующая цилиндра равна $4\sqrt{3}$. Плоскость α пересекает нижнее основание цилиндра по хорде длины 6, а верхнее основание — по хорде длины 8. Расстояние между этими хордами равно 7.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от плоскости α .

б) Найдите расстояние между плоскостью α и центром нижнего основания цилиндра.

5) Радиус основания конуса равен 24, а высота конуса равна 7.

а) Постройте такое сечение конуса, которое является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью этого сечения и плоскостью основания конуса.

6) Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $\sqrt{17}$ вписан в шар. Точки M и N — середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно.

а) Постройте сечение куба плоскостью AMN .

б) Найдите площадь сечения шара плоскостью AMN .

Задание №14.6 (ДЗ). Ответы.

1) 60π .

2) $2\sqrt{6}\pi$.

3) 45° .

4) $\frac{16\sqrt{3}}{7}$.

5) $\arcsin \frac{14\sqrt{3}}{25}$.

3) $12,5\pi$.

