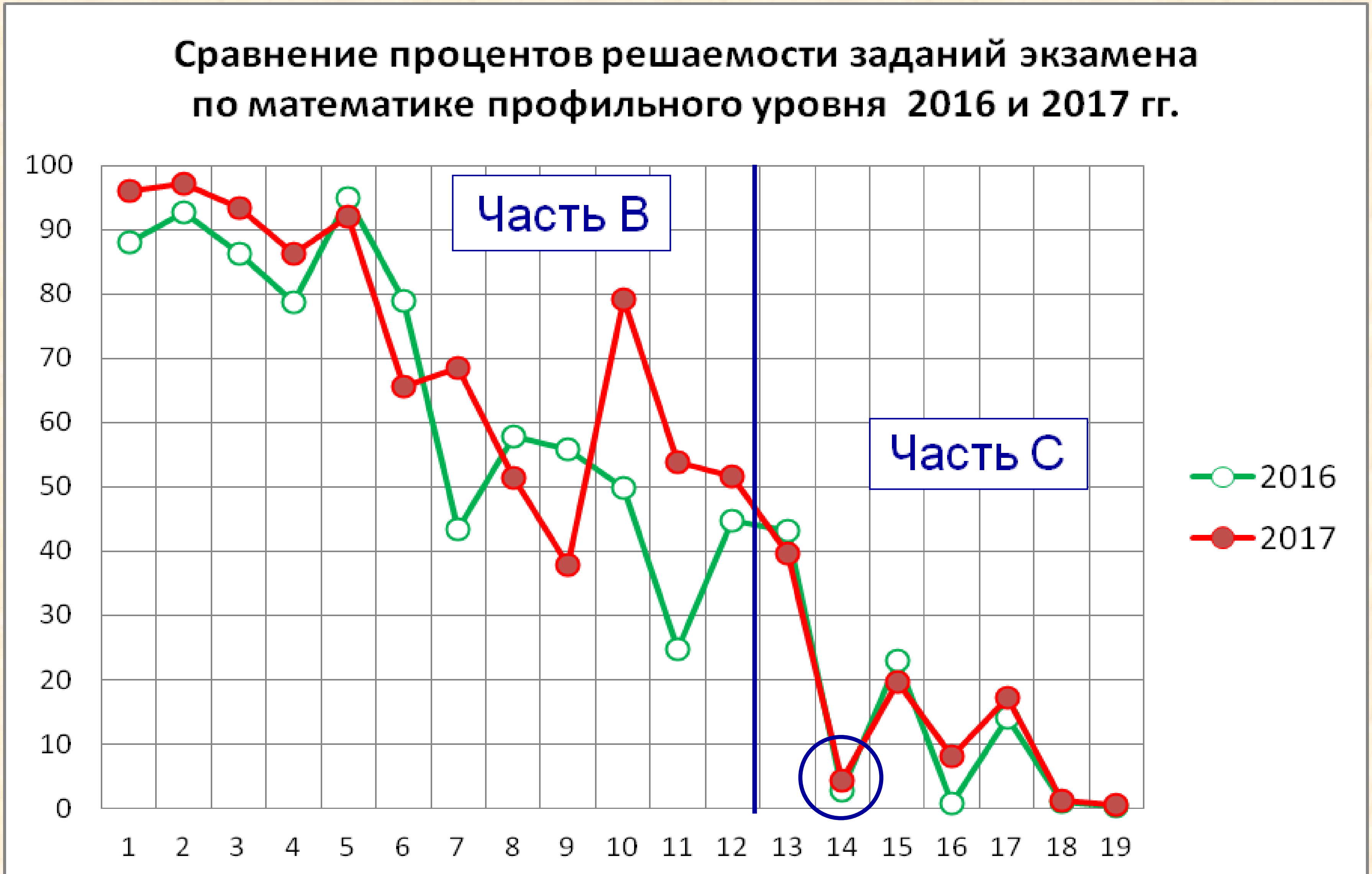
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Московский институт электронной техники»
Зеленоград 28 декабря 2017

Рекомендации по подготовке к выполнению задания №14 (стереометрия) ЕГЭ профильного уровня

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»

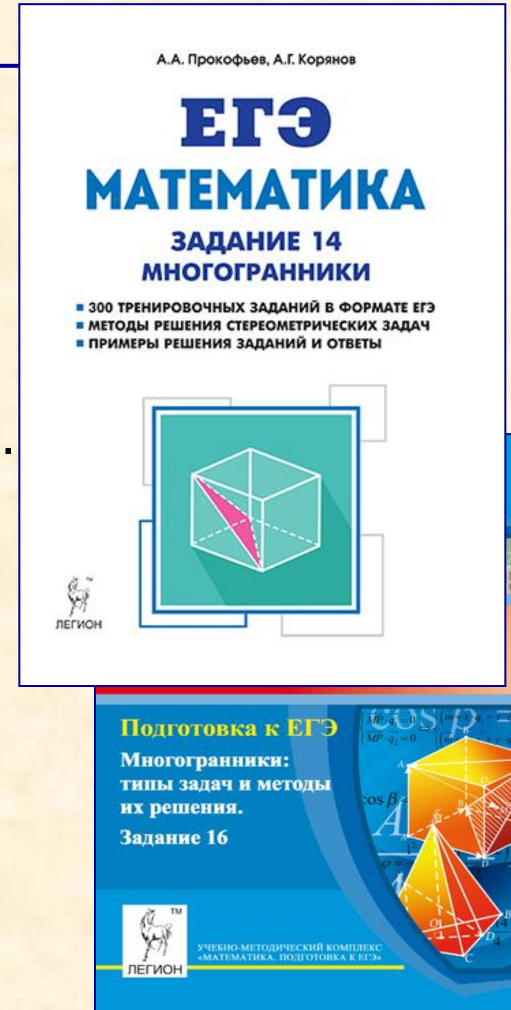
Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.



Создано разработчиками ЕГЭ

Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел 14 – 20 – 36 – 50?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. издательства Легион по заданию 14



Оглавление

Глава 1. Расстояния и углы 6

Расстояние: (1) между двумя точками;
(2) от точки до прямой;
(3) от точки до плоскости;
(4) между скрещивающимися прямыми.

Угол между: (1) двумя прямыми;
(2) между прямой и плоскостью;
(3) между плоскостями.

Глава 2. Площади и объёмы 125

(1) Площадь поверхности многогранника;
(2) площадь сечения многогранника;
(3) объём многогранника.

Глава 3. Дополнения. 169

(1) Методы построения сечения многогранника плоскостью;
(2) векторный метод; (3) координатный метод; (4) задачи на доказательство; (5) опорные задачи.

Что можно ожидать в качестве задания 14 на экзамене?

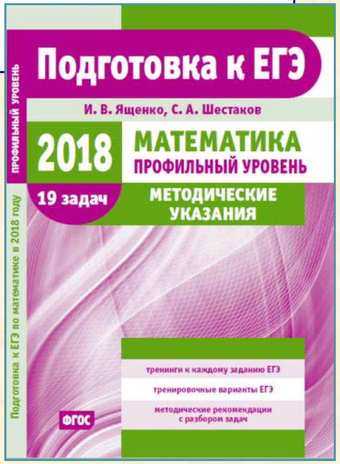
Задание 14

Тип задания по кодификатору требований — Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Характеристика задания — Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий — Традиционная задача по стереометрии, связанная с вычислением длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.

О сколько нам открытий чудных
Готовят …

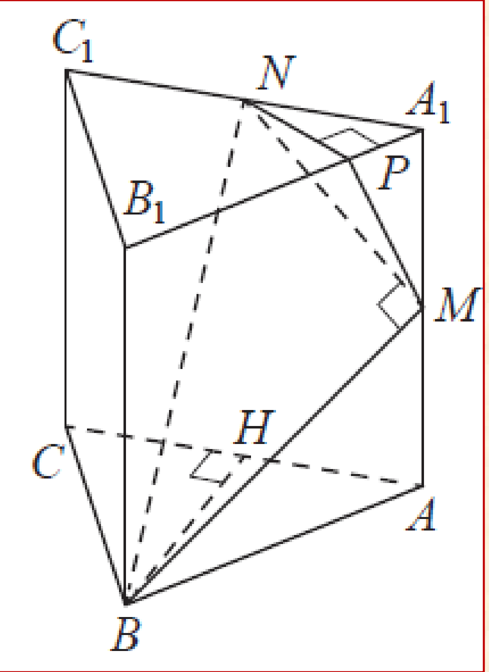


Задание 14 из демоверсии ЕГЭ 2018 (профильный уровень)

1

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

а) Пусть точка H — середина AC. Тогда $BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63$.
Вместе с тем, $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63$, а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.
б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.



Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP – линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

О критериях, строгости обоснования решения и действиях экспертов в случае решений, отличающихся от приведенных в критериях

14

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
Выполнен только один из пунктов *а* и *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

При проверке решений, отличающихся от приведенных в критериях, на первое место выходит квалификация эксперта. Присутствие ответа, совпадающего с приведенным в критериях, еще не является достаточным условием выставления полного балла, а ответа, отличающегося от приведенного в критериях, – для выставления нулевой оценки.

Типичные ошибки при решении задания 14

Типичные ошибки участников экзамена связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства. Например, доказательство пункта *а* задания 14 часто начинается так:

«Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда …» – в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный;

«Пусть прямые параллельны…» – в случае, когда нужно доказать параллельность прямых. И т. д.

Многие участники экзамена неверно применяют признаки: перпендикулярности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и т. д., демонстрируют непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции.

При выполнении второго пункта участники:

– допускают ошибки в геометрических формулах (например, в формулах для вычисления объемов);

– не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решение.

Кроме этого участники экзамена допускают большое количество ошибок при построении чертежа.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 5-8. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 100 с.

Особенности первого пункта задания 14

Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта *а*. Условие до пункта *а* задания:

– не содержит числовых данных (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте *а*, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);

ЕГЭ 2017

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N, так что $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q середины рёбер DA и DC соответственно.
а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

– содержит числовые данные (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.
а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

ЕГЭ 2017

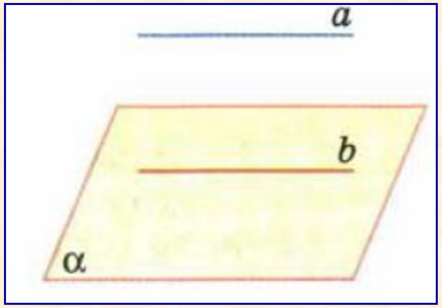
Об учебниках по геометрии и теоремах в них
(что должен знать эксперт)

Геометрия. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич.

Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.].

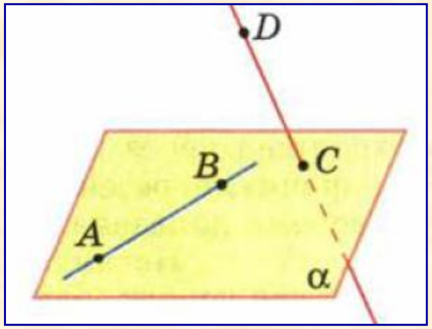
Признаки параллельных и скрещивающихся прямых, параллельности прямой и плоскости

Теорема 7 *(признак параллельности прямых).* **Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.**



Теорема 9 *(признак параллельности прямой и плоскости).* **Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны.**

Теорема 4 *(признак скрещивающихся прямых).* **Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.**

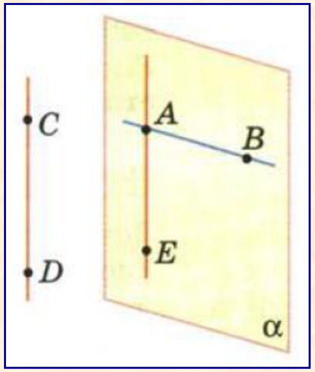


Теоремы существования и единственности

Теорема 6. Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

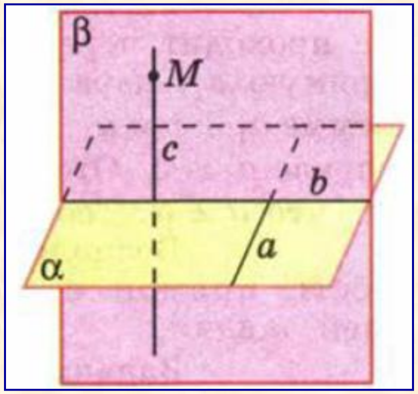
Задача

Докажите, что существует, и притом только одна, прямая, пересекающая две данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярная к каждой из них.

Теорема 23. Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Теорема

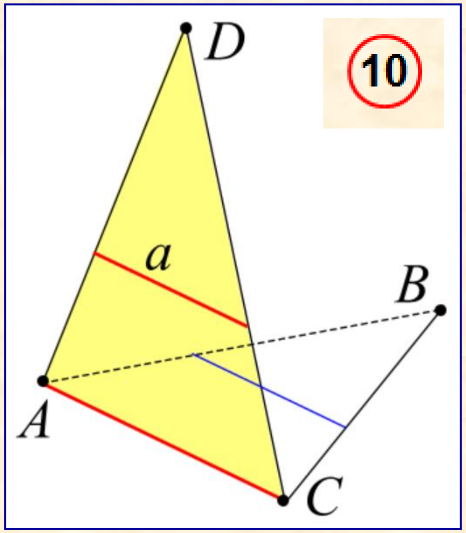
Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



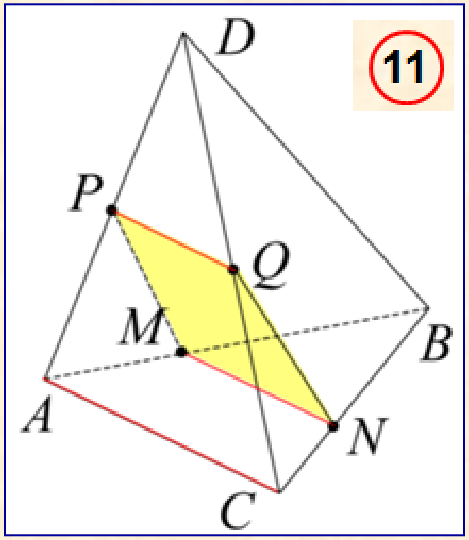
Параллельные прямые

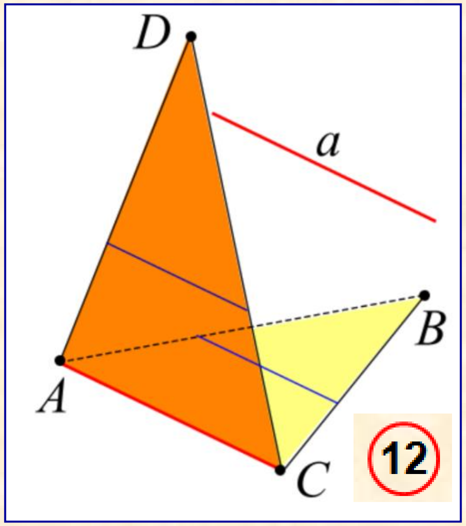
Теорема 5. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема 10. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.



Теорема 11. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых.





Теорема 12. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

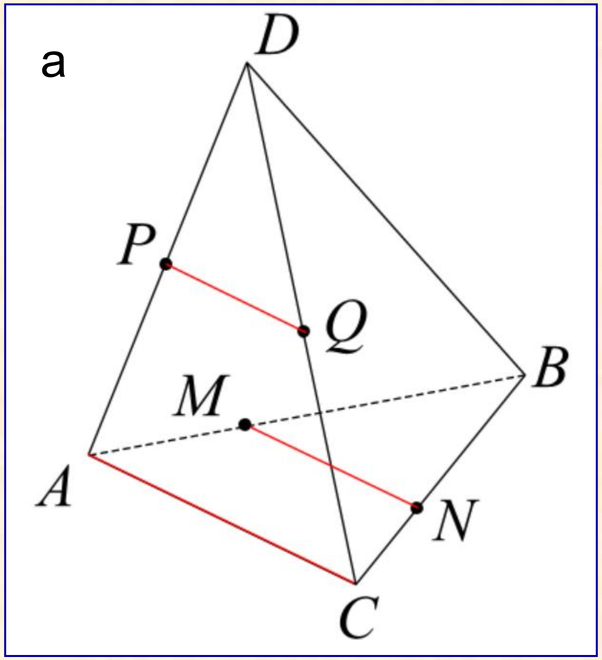
Задание 14

14

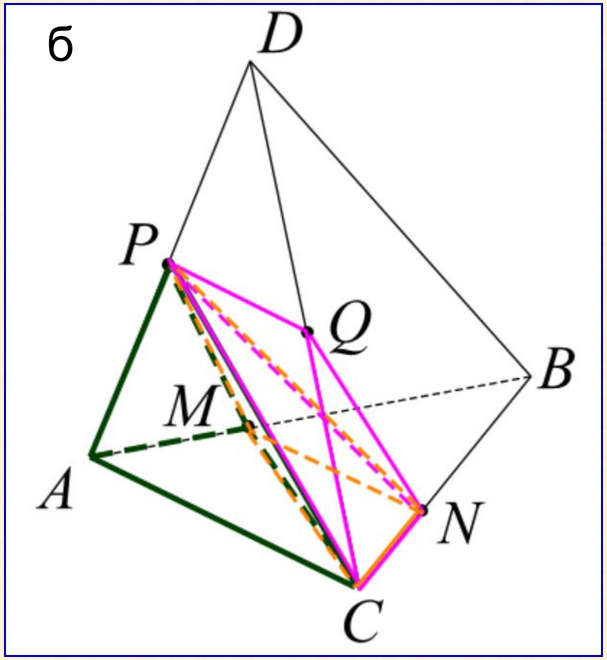
На рёбрах *AB* и *BC* треугольной пирамиды *ABCD* отмечены точки *M* и *N*, так что *AM* : *MB* = *CN* : *NB* = 1 : 2. Точки *P* и *Q* середины рёбер *DA* и *DC* соответственно.

а) Докажите, что точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *PQM* разбивает пирамиду.



Разбиваем *APMQNC* на три треугольных пирамиды *CAPM*, *PCQN* и *PCMN*.



Прокофьев А.А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов. Часть III (стереометрия). – М.: МИЭТ, 2001, 272 стр.

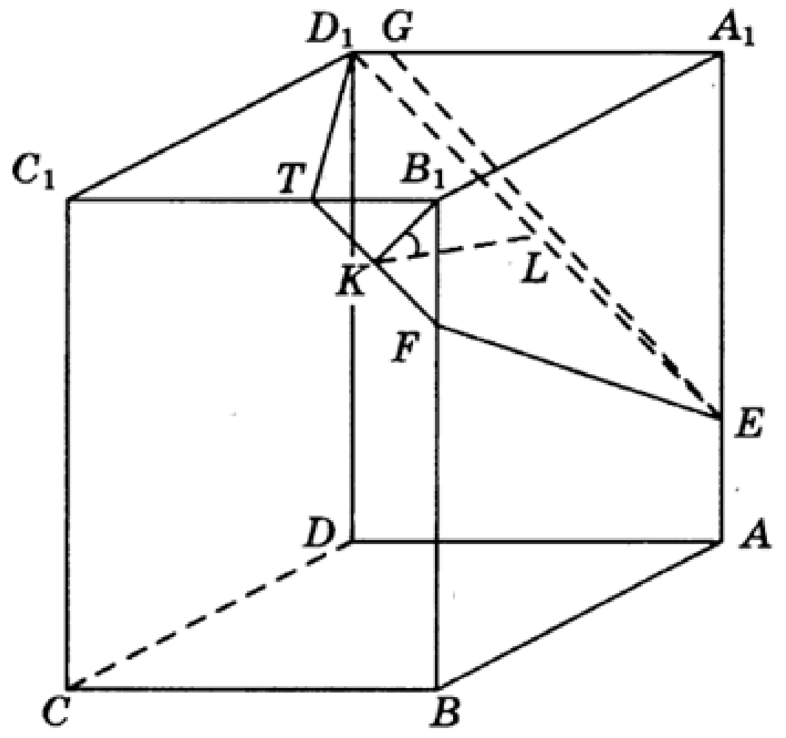
Задание 14

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

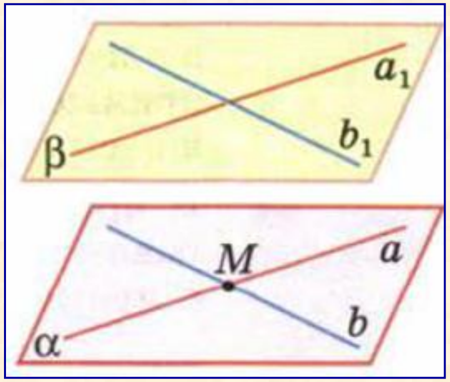


$$\cos\angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2\cdot B_1K\cdot KL} = -\frac{1}{3}.$$

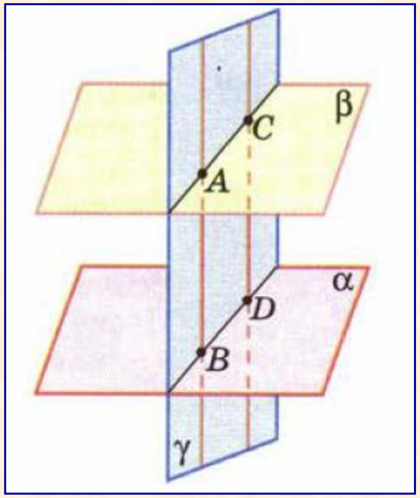
Ответ: б) $\arccos\frac{1}{3}$.

Признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей

Теорема 18 *(признак параллельности плоскостей)*. Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны.



Теорема 19. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Теорема 20. Прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны.

Теорема 25. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Теорема 24. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны.

Теорема о трех перпендикулярах

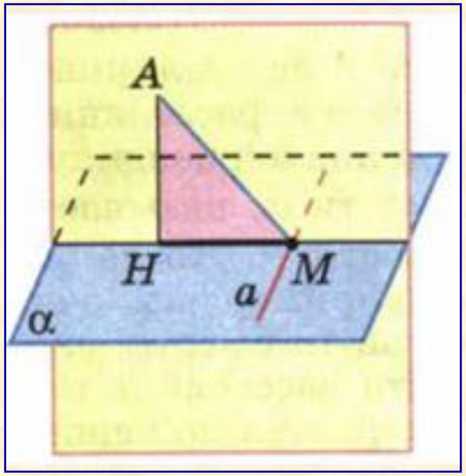
Теорема 16 *(теорема о трех перпендикулярах)*. **Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой наклонной.**

Теорема 17. Если на плоскости проведена прямая перпендикулярно наклонной, то эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

Теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



Демовариант. Решение задания 14

14

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

а) Пусть точка H — середина AC. Тогда $BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63$.

Вместе с тем, $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63$,

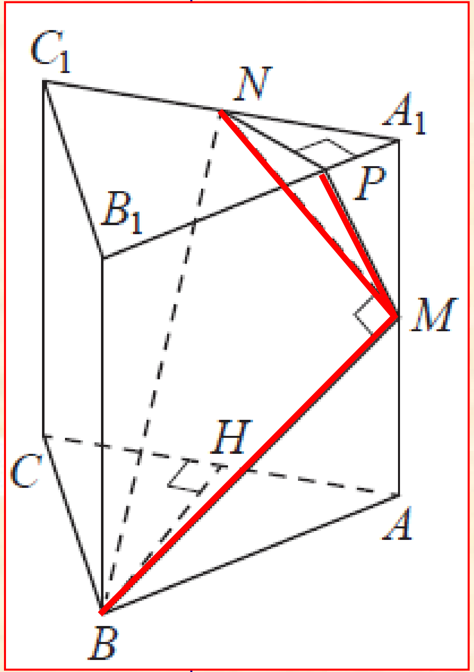
а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

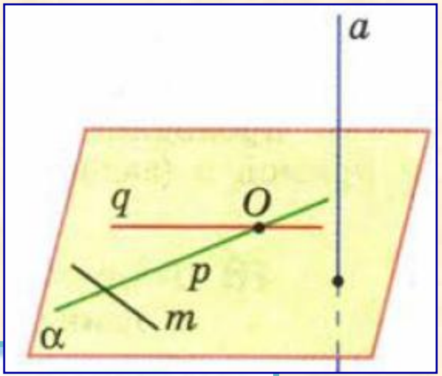
Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\sin\angle NMP = \dfrac{NP}{MN} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.



Перпендикулярность прямой и плоскости



Теорема 13 *(признак перпендикулярности прямой и плоскости)*. **Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.**

Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема 26. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Теорема 14. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 15. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

ЕГЭ 2017 (основной экзамен)

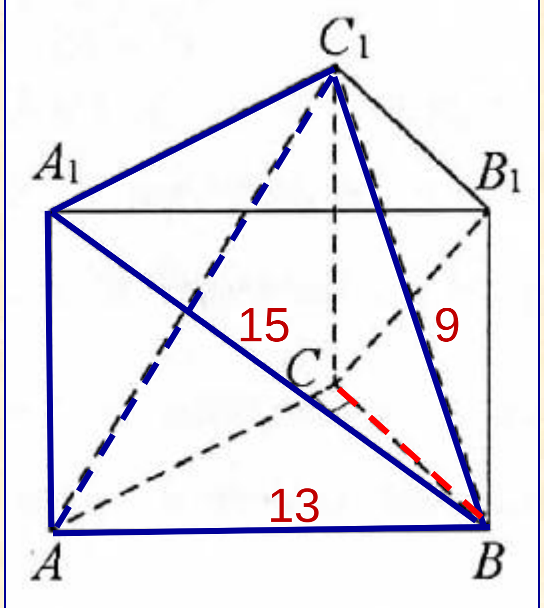
14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

а) Прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1, поскольку она перпендикулярна прямым C_1B_1 и CC_1. Значит, прямые A_1C_1 и BC_1 перпендикулярны.



Ответ: б) $20\sqrt{14}$.

О неверных доказательствах (примеры и действия экспертов)

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

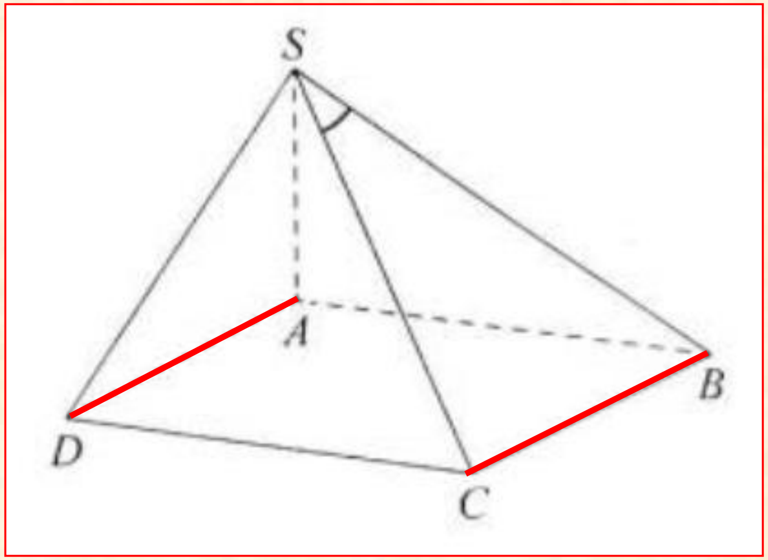
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

ЕГЭ 2015

а) В треугольнике SAB имеем:

$$SB^2=12=7+5=SA^2+AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично, из равенства $SD^2=11=7+4=SA^2+AD^2$ получаем, что $\angle SAD=90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD.



б) Прямая BC перпендикулярна прямым SA и AB, значит, она перпендикулярна плоскости ASB, а искомый угол равен углу BSC. Из прямоугольного треугольника BCS получаем: $\text{tg}\angle BSC=\frac{BC}{SB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\angle BSC=30°$.

Пример задания 14 и его решение

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 15$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{111}$, $SB = 5\sqrt{7}$, $SD = 4\sqrt{21}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

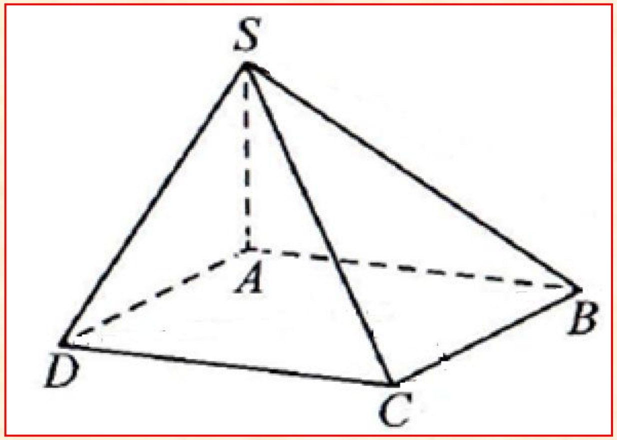
ЕГЭ 2015

а) В треугольнике SAB имеем:

$$SB^2 = 175 = 111 + 64 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично, из равенства

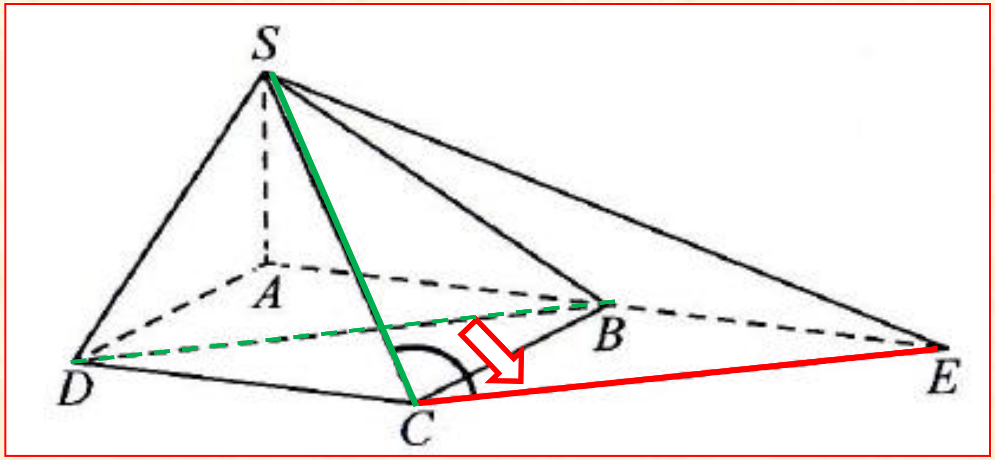
$$SD^2 = 336 = 111 + 225 = SA^2 + AD^2$$



получаем, что $\angle SAD = 90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD.

Решение задания 14

14



б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Найдём угол SCE. По теореме Пифагора:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 17;\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 20 \text{ и } SE^2 = SA^2 + AE^2 = 367.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\angle SCE;\ 367 = 400 + 289 - 680\cos\angle SCE;$$

$$\cos\angle SCE = \frac{161}{340}.$$

Искомый угол равен $\arccos\frac{161}{340}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{161}{340}$.

Перпендикулярность двух плоскостей

Теорема 28 (*признак перпендикулярности двух плоскостей*). **Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.**

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 63).

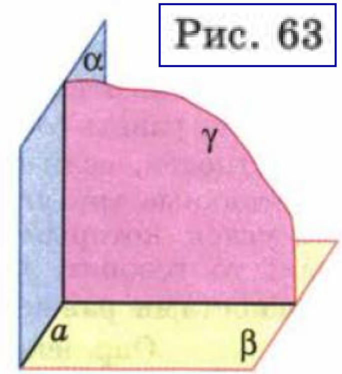


Рис. 63

Теорема 29. Если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости.

Теорема 30. Если прямая, проведенная через точку одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них.

Теорема 31. Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

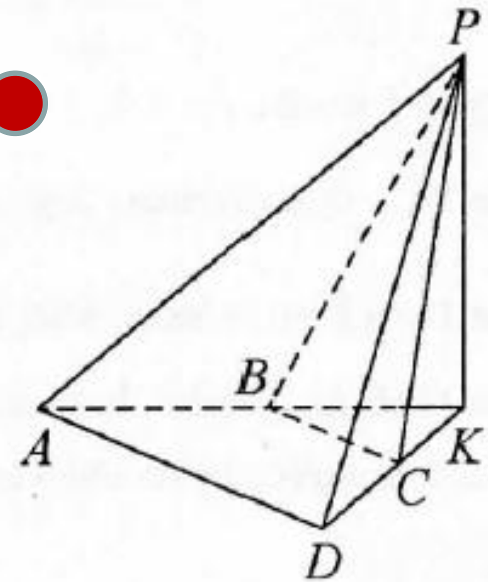
ЕГЭ 2017 (основной экзамен)

14

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.



а) Заметим, что $\angle AKD = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK — высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD. Значит, они перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45°;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

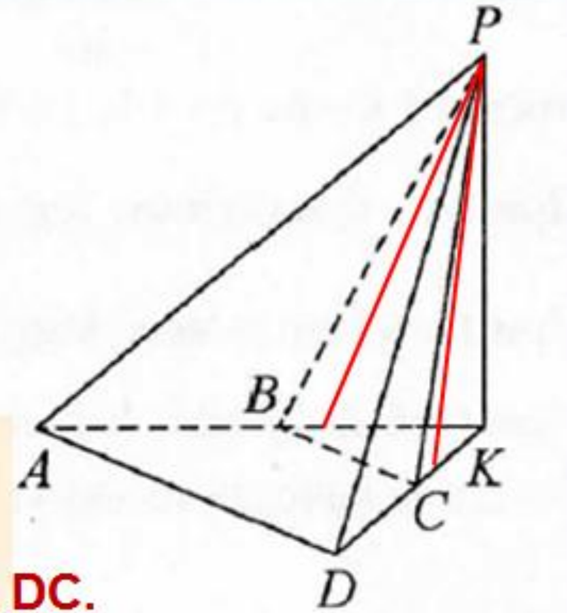
Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$,

а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.

ЕГЭ 2017 (основной экзамен)

а) Заметим, что $\angle AKD = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, ~~поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды.~~ Значит, PK — высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD. Значит, они перпендикулярны.



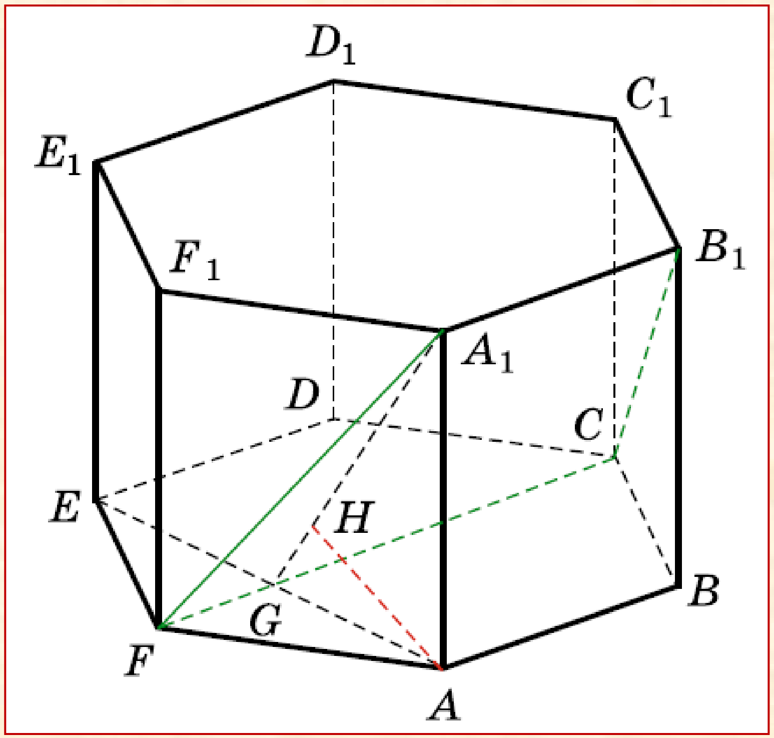
Из точки P опускаем перпендикуляры на AB и DC. Они являются перпендикулярами к плоскости, опущенными из одной точки. Следовательно, должны совпадать, то есть совпадать с PK.

Вычисление расстояния от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

1. Метод, основанный на использовании определения

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



Прямая FC перпендикулярна AE и AA_1, поэтому перпендикулярна плоскости A_1AE.

Пусть $FC \cap AE = G$. Плоскость A_1AE перпендикулярна плоскости A_1B_1C, содержащей прямую FC, и пересекает ее по прямой A_1G. Пусть AH – высота в треугольнике AA_1G, то есть прямая AH перпендикулярна прямой A_1G, значит, и $AHBA_1B_1C$.

Находим высоту AH.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

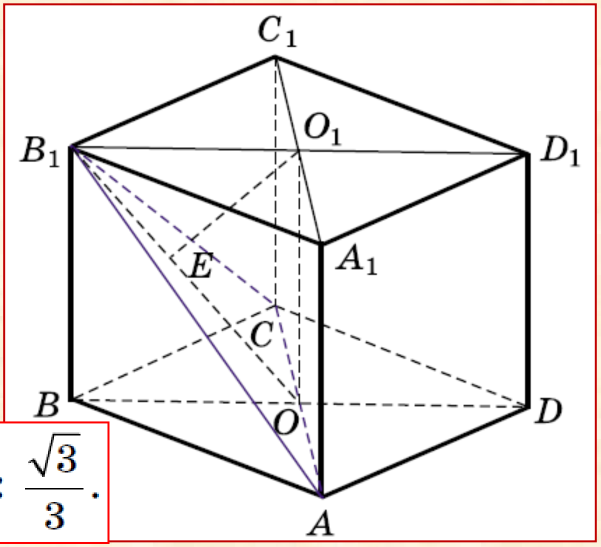
Вычисление расстояния от точки до плоскости

2-3. Метод параллельных прямых и плоскостей

Метод опирается на следующие два утверждения.

Расстояние от точки *M* до плоскости α:

● равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P* на прямой l, которая проходит через *точку M* и параллельна плоскости α.



В единичном кубе $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.

14

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

● равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P* на плоскости β, которая проходит через точку *M* и параллельна плоскости α.

4. Метод объемов

Если объем пирамиды *ABCM* равен *V*, то расстояние от точки *M* до плоскости, содержащей треугольник *ABC*, вычисляют по формуле

$$\rho(M;\, ABC) = \frac{3V}{S_{ABC}}.$$

В общем случае рассматривают равенство объемов одной фигуры, выраженных двумя независимыми способами. При использовании данного метода нет необходимости в проведении перпендикуляра из точки на плоскость и его обоснования.

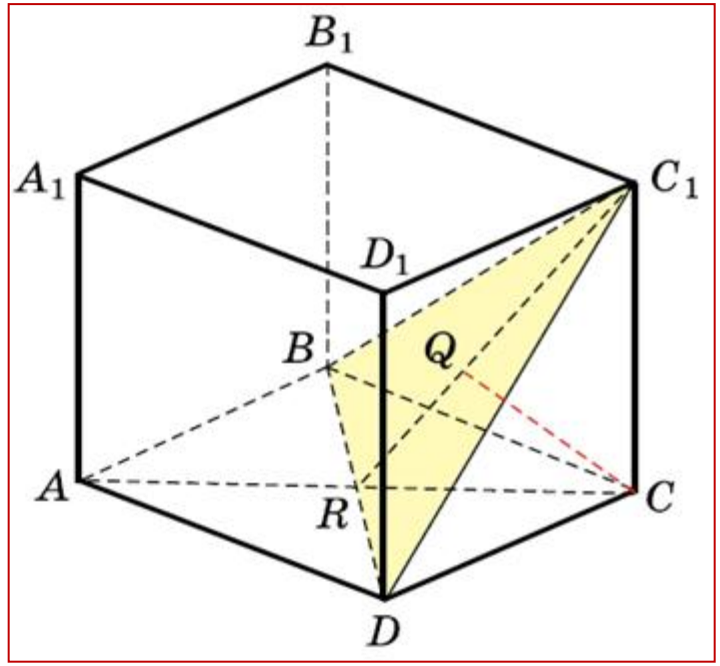
Метод объемов

14

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1.

Искомое расстояние равно высоте CQ * (см. рис.), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1. Объем этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot CC_1=\frac{a^3}{6}.$$



С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний, то объем пирамиды $BCDC_1$ равен

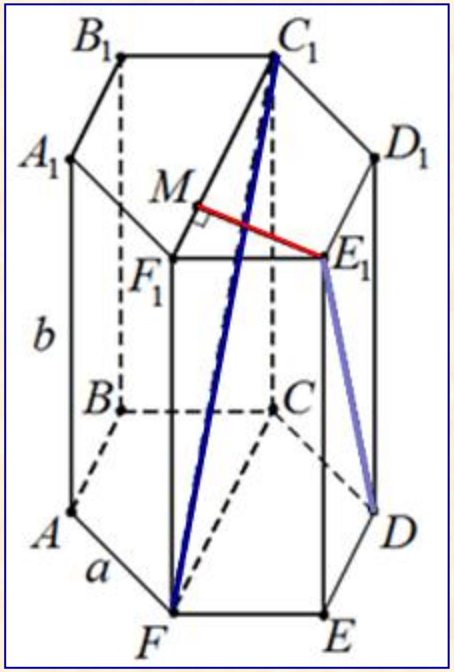
$$\frac{1}{3}S_{BC_1D}\cdot CQ=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot CQ=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot CQ.$$

Приравнивая объемы, находим: $CQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

* Нет необходимости доказывать, что точка Q лежит на RC_1. Достаточно сказать, что CQ – высота пирамиды $BCDC_1$.

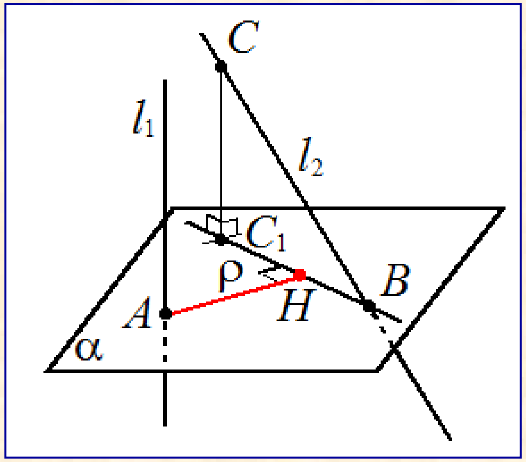
Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

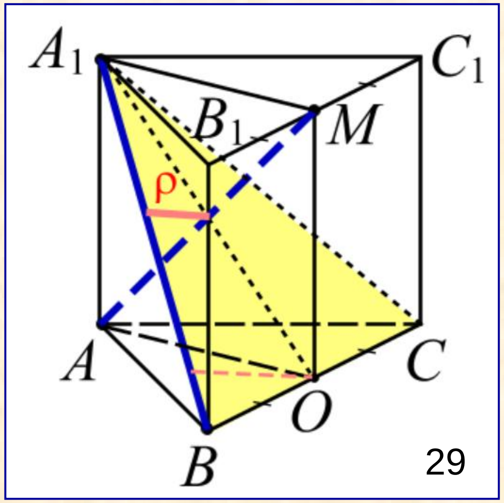


1. *Метод построения общего перпендикуляра.*
2. *Метод параллельных прямой и плоскости.*
3. *Метод параллельных плоскостей.*
4. *Метод ортогонального проектирования.*

$$\rho(l_1; l_2) = \rho(A; BC_1) = AH$$

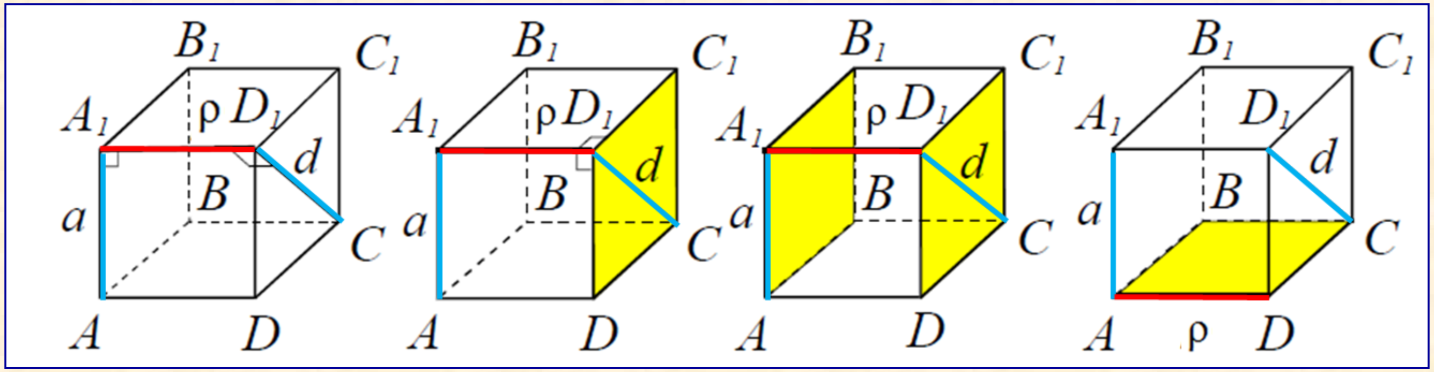


Задача (МИОО, 2013). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

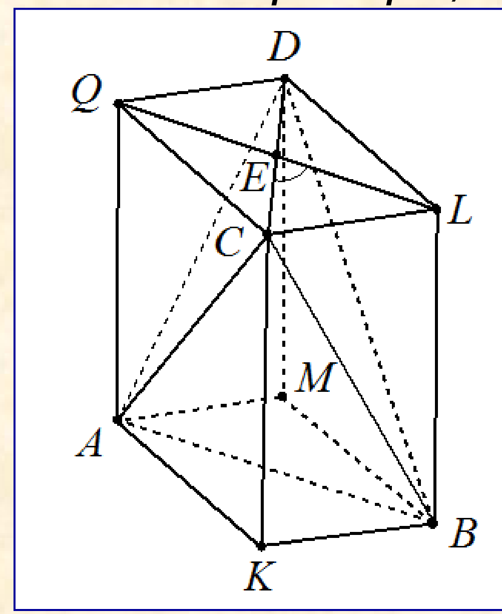


Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Задача. В кубе, длина ребра которого равна, найти расстояние между ребром и диагональю не пересекающей его грани.



5. *Метод, основанный на применении формулы объема тетраэдра, в котором известны длины двух скрещивающихся ребер, угол и расстояние между ними.*



Если V – объем пирамиды $ABCD$, в которой $AB = a$, $CD = b$ – скрещивающиеся ребра, d – расстояние, а φ – угол между ними, то справедлива следующая формула

$$\boxed{d = \frac{6V}{ab\sin\varphi}}.$$

Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. О различных подходах к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми. // «Математика в школе»,− М.: «Школьная пресса», – 2015. − № 5. − С. 18-32.

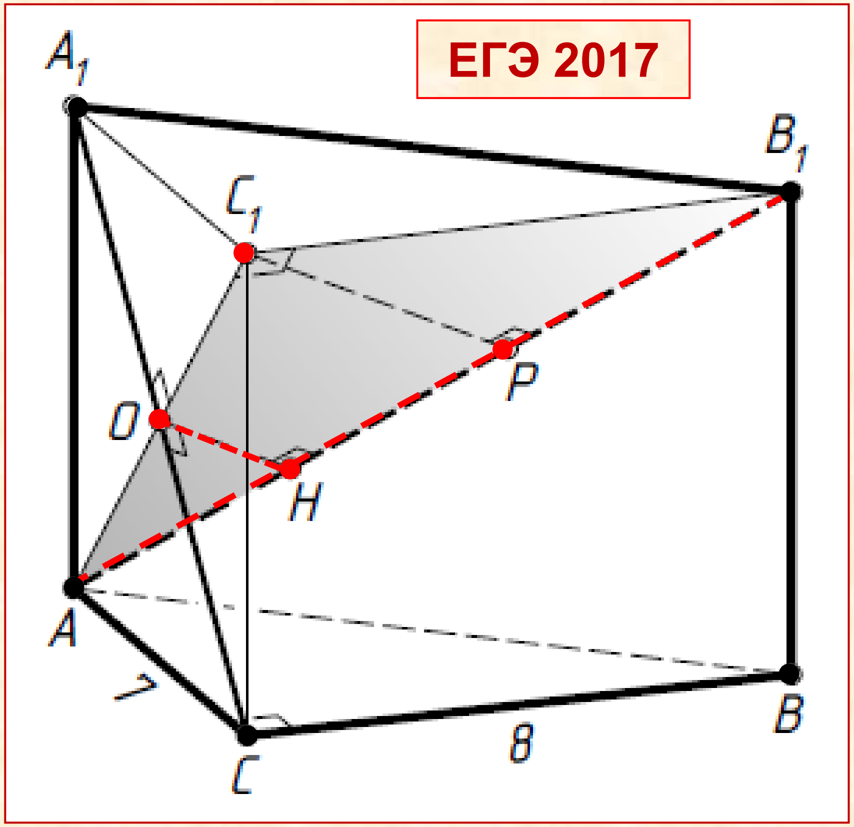
Расстояние между скрещивающимися прямыми

14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $BC = 8$ и $AC = 7$.



а) **Теорема о трех перпендикулярах + признак квадрата**

б) $AC_1 = 7\sqrt{2}$,

$$AB_1 = \sqrt{AC_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{98+64} = 9\sqrt{2},$$

$$C_1P = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{7\sqrt{2}\cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{56}{9}.$$

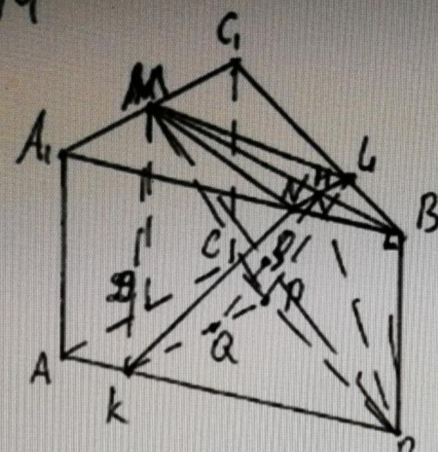
Следовательно, $OH = \frac{28}{9}$.

Ответ: $\frac{28}{9}$.

О неверных доказательствах (действия экспертов)

(задания 14 и 16)

N14



а) BM перпендикулярна любой прямой, параллельной AC и лежащей в плоскости (ABC) по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$ ⊕

Проведём QH ($QH \perp NL$ и $QH \perp KP$; $QH \cap BM = O$) $\triangle OHM \sim \triangle B_1BM$ по I призн. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MOH = \angle MB_1B = 90°$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QH \Rightarrow$

$\Rightarrow BM \perp \gamma$. ч.т.д. ⊖

б) $(\cdot)O$ делит BM пополам. Из $\triangle BMB_1$ по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$. Из $\triangle B_1LH$ по т. Пифагора $B_1H = \sqrt{3}$. Из $\triangle BHB_1$ по т. Пифагора $BH = 2\sqrt{3}$. Из $\triangle BOH$ по т. Пифагора $OH = \sqrt{3}$. $(\cdot)O$ делит QH пополам $\Rightarrow QH = 2OH = 2\sqrt{3}$

$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ ⊕

($KPLN$ – р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

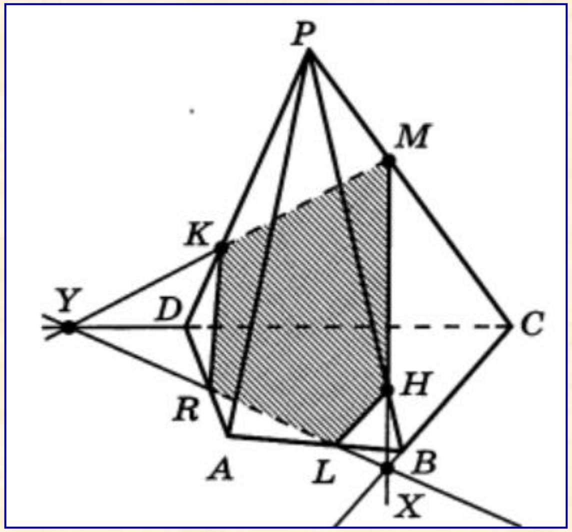
0 баллов

Построения сечений, достаточность обоснования и строгость оценивания экспертами

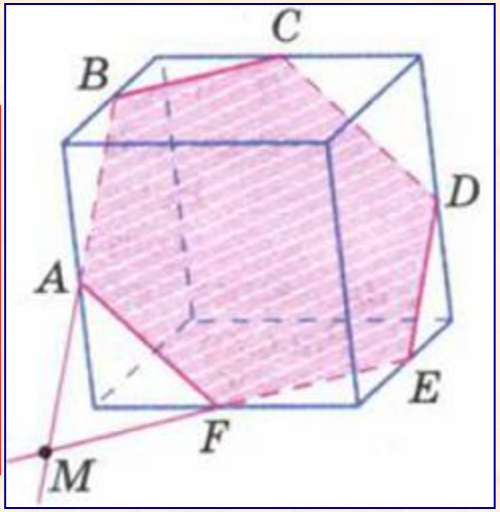
Следом плоскости α *на плоскости* β называют прямую, по которой плоскости α и β пересекаются. Соответственно, *след секущей плоскости на грани* многогранника – это отрезок, все точки которого являются общими точками секущей плоскости и грани.

Следом прямой l *на плоскости* α называют точку, в которой прямая l пересекает плоскость α. Соответственно, *след секущей плоскости на ребре* многогранника – это общая точка секущей плоскости и ребра.

Построить сечение многогранника плоскостью означает построить многоугольник, все рёбра которого – следы секущей плоскости на гранях многогранника, а его вершины – следы секущей плоскости на рёбрах многогранника.



Метод следов



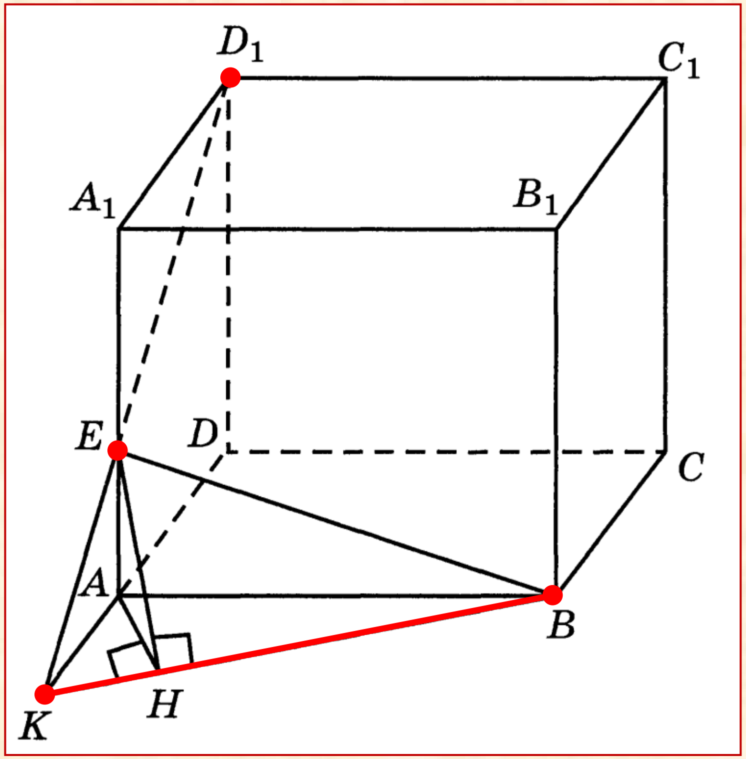
Метод следов + использование свойств параллельных плоскостей

Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. О различных подходах к вычислению площадей сечений. // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2014. – № 10. − С. 7-15, 2015. − № 1. − С. 13-21.

Построение прямой пересечения плоскостей

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3.
На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 1:2$.
а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.
б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.



Метод следов
+
теорема о трех перпендикулярах

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\operatorname{tg}\angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\left(\sin\angle AHE = \frac{\sqrt{5}}{3}; \cos\angle AHE = \frac{2}{3}.\right)$$

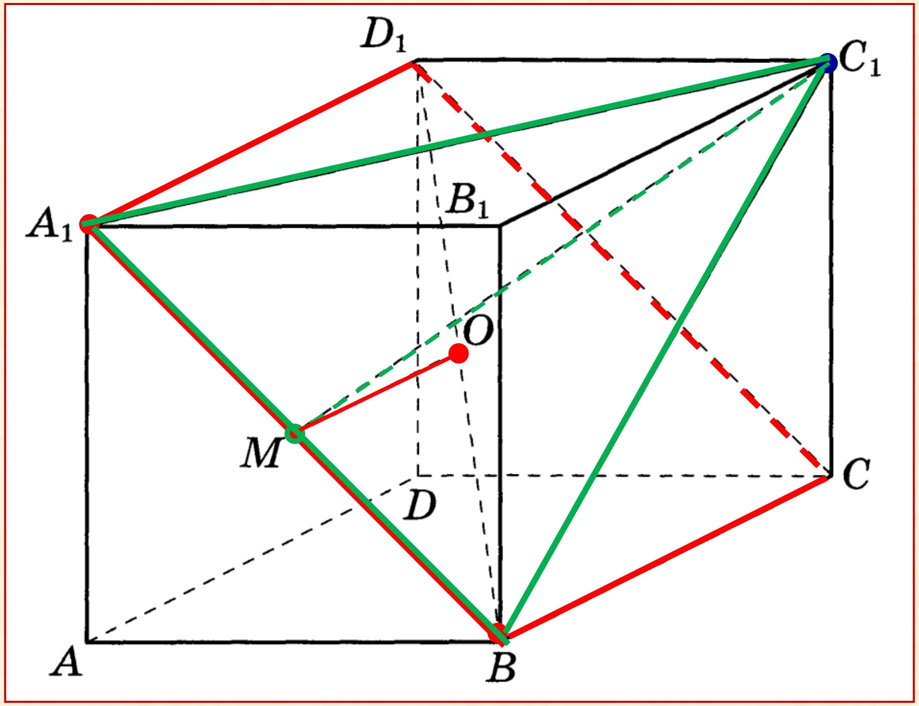
Построение прямой пересечения плоскостей

14

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.



Свойство параллельных плоскостей + Построение линейного угла двугранного угла

$$\cos\angle OMC_1 = \frac{OM^2 + C_1M^2 - OC_1^2}{2\cdot OM\cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

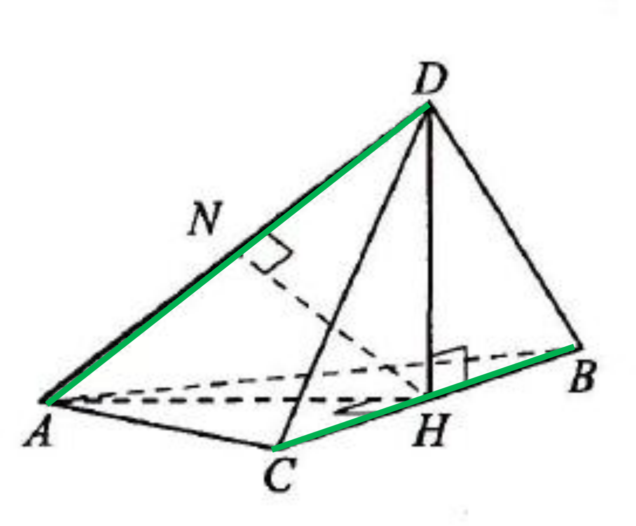
Пример задания 14 и его решение

14

В тетраэдре $ABCD$ ребро AD имеет длину 4, а все остальные рёбра равны 5.
а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.
б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, содержащей прямую AD и перпендикулярной прямой BC.

ЕГЭ 2015

а) Пусть H — середина ребра BC, тогда медианы AH и DH равнобедренных треугольников BAC и BDC соответственно перпендикулярны BC. Значит, плоскость AHD перпендикулярна прямой BC, поэтому прямые AD и BC перпендикулярны.



б) Треугольник AHD является сечением тетраэдра плоскостью, содержащей прямую AD и перпендикулярной прямой BC.

Из равных равнобедренных треугольников BAC и BDC находим:

$$DH = AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

В равнобедренном треугольнике AHD высота HN, проведённая к основанию, равна $\sqrt{AH^2 - \frac{AD^2}{4}} = \frac{\sqrt{59}}{2}$, значит, площадь треугольника AHD равна $\sqrt{59}$.

Ответ: б) $\sqrt{59}$.

Решение задания 14

14

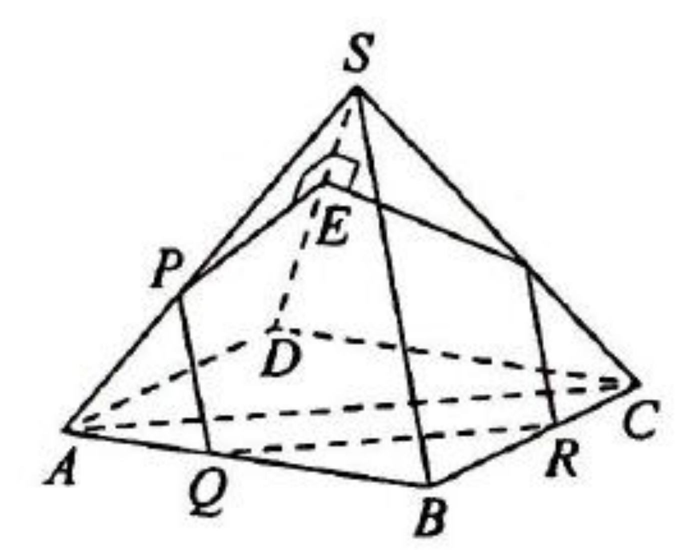
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

ЕГЭ 2015

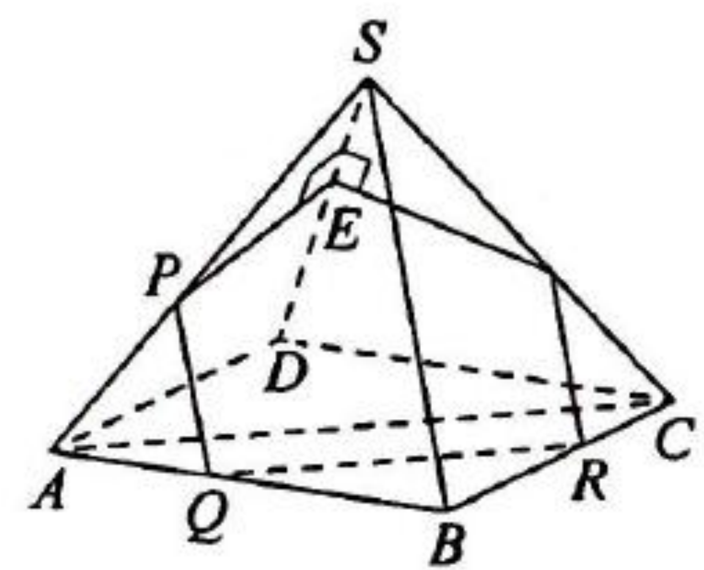
а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая DS перпендикулярна прямой SB. Поскольку прямые SB и PQ параллельны, прямая DS перпендикулярна прямой PQ. Прямая AC перпендикулярна прямой BD, и по теореме о трёх перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD, а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD. Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.



Решение задания 14

14 б

Построение сечения в этой задаче не является необходимым элементом решение задачи.



б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E. Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD, откуда $SE = SP\cos 60° = \frac{3}{2}$.

Значит, $DE = SD - SE = \frac{7}{2}$.

Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD, искомое расстояние равно DE.

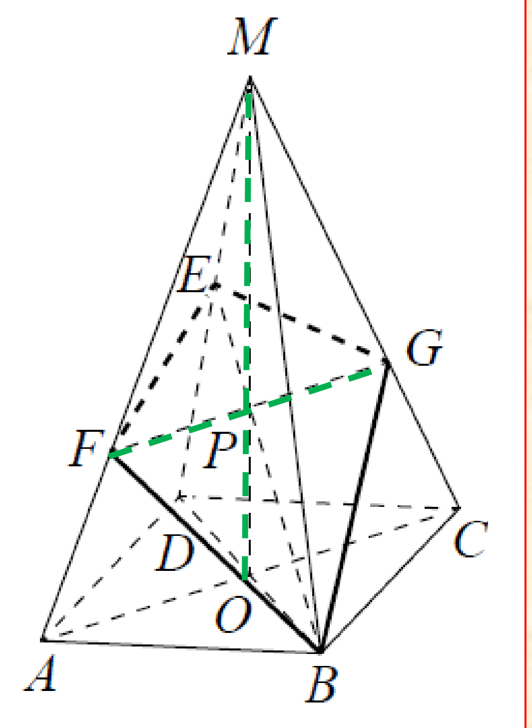
Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

Решение задания 14

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

ЕГЭ 2013



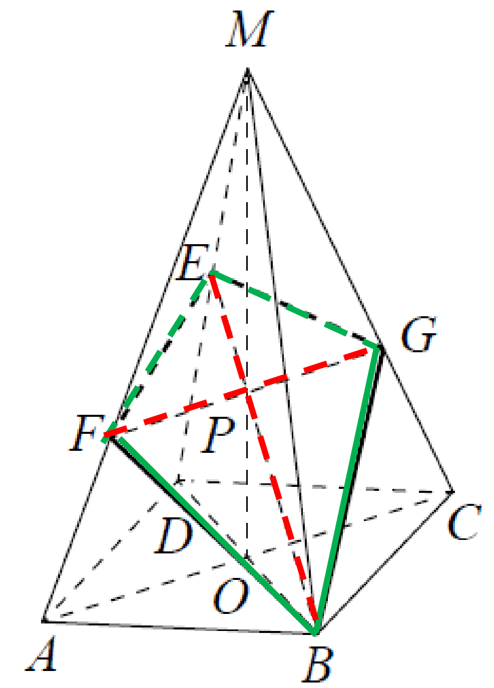
Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$

Решение задания 14

14



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

14

Процент решаемости 2,87%

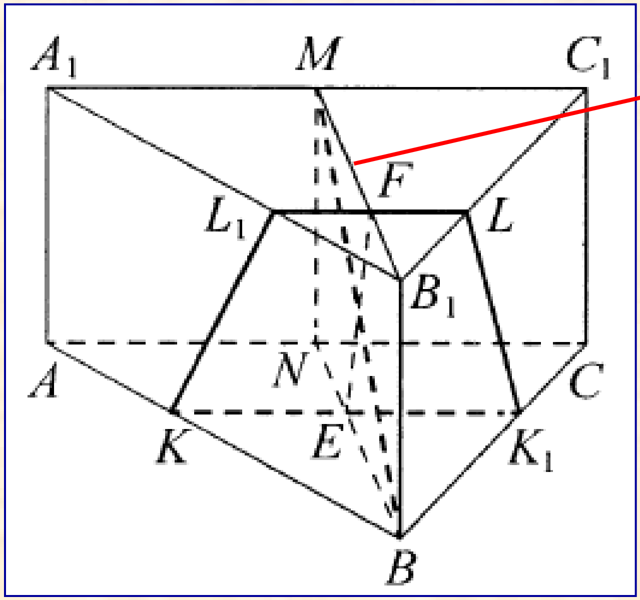
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

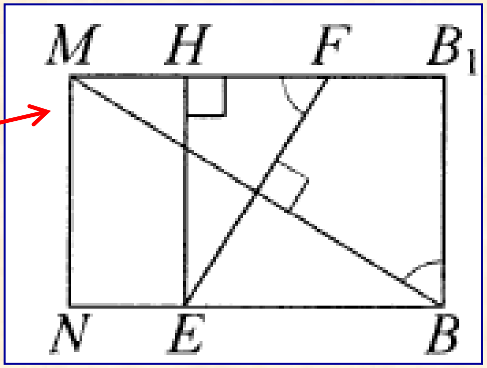
а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

ЕГЭ 2016

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Выносной чертеж





Проблема пункта *а*). Плохое владение теорией (признаки перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах и т. д.).

14

ЕГЭ 2016 (досрочный)

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

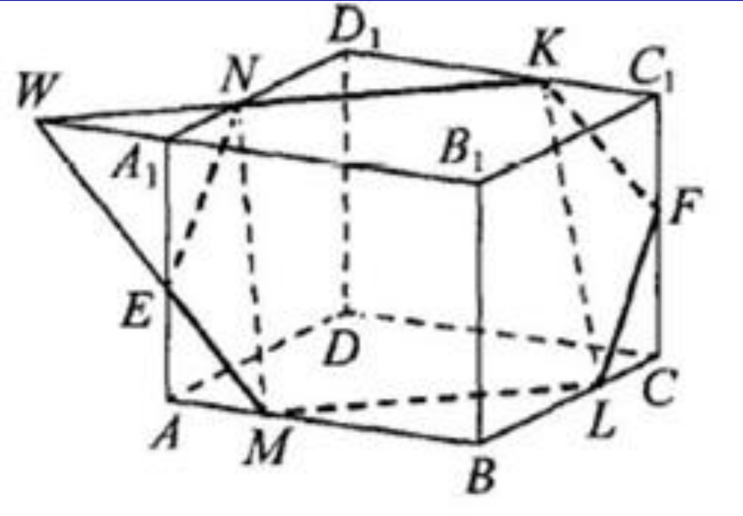
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

а) Плоскость MNK пересекает плоскости оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым, значит, прямые NK и ML параллельны и $CL = 1$.

Вычислим стороны и диагонали четырёхугольника $MNKL$:

$$NK = ML = \sqrt{MB^2 + BL^2} = 5\sqrt{2},$$

$$LK = MN = \sqrt{MA^2 + AA_1^2 + A_1N^2} = 5\sqrt{2},$$



$$MK = \sqrt{(MB - KC_1)^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(BL - NA_1)^2 + AB^2 + AA_1^2} = LN.$$

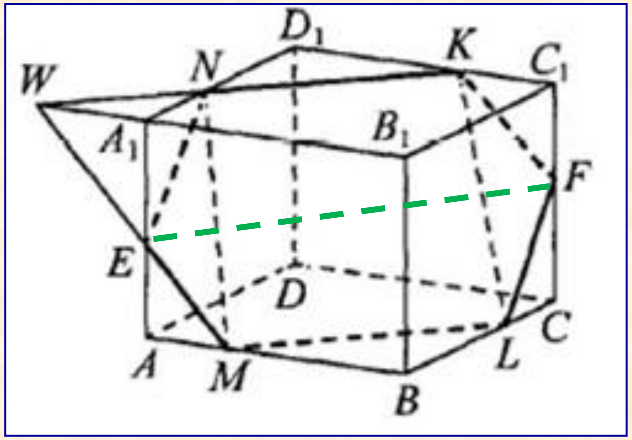
Поэтому $MNKL$ — квадрат.

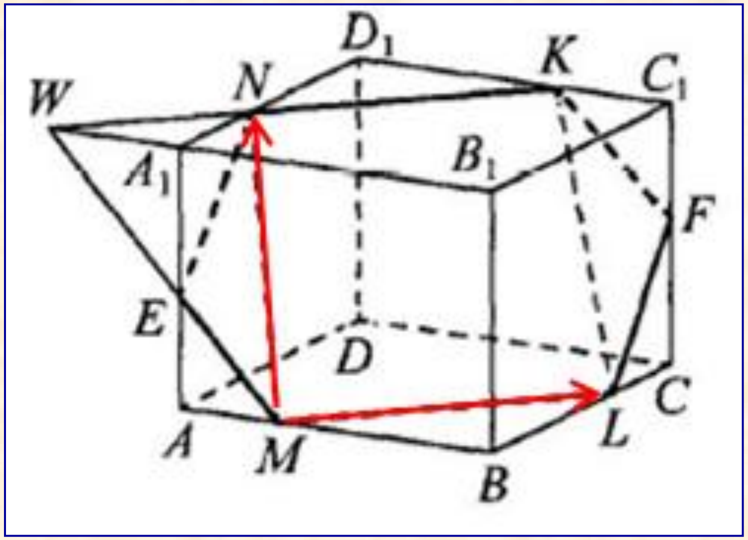
14

ЕГЭ 2016 (досрочный)

Пункт а) можно решить с использованием координатного методам.

Многие участники экзамена считали, что квадрат MNKL – сечение!





б) Пусть W — точка пересечения прямых NK и A_1B_1. Тогда $WA_1 = NA_1 = MA$, поэтому прямая WM, а значит и плоскость MNK, пересекает ребро AA_1 в его середине E. Аналогично, плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в его середине F.

В прямоугольнике $AEFC$ имеем $EF = AC = 6\sqrt{2}$. Сечение $MENKFL$ состоит из двух равных трапеций $ENKF$ и $EMLF$, причём прямая MN перпендикулярна их основаниям. Значит, искомая площадь равна

$$2 \cdot \frac{ML + EF}{2} \cdot \frac{MN}{2} = 55.$$

Ответ: б) 55.

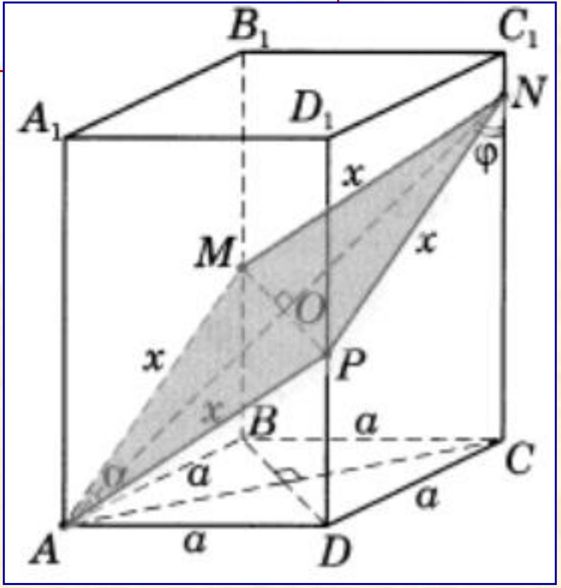
Применение теоремы о площади ортогональной проекции

Теорема 32. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций.

$$S(\Phi_1) = S(\Phi) \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между плоскостью n-угольника Φ плоскостью проекций.

Пример 7. Плоскость пересекает прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием по ромбу с острым углом α. Под каким углом эта плоскость пересекает боковые ребра параллелепипеда?



Ответ: $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Бардушкин В.В., Белов А.И., Ланцева И.А., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. Применение теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника при решении стереометрических задач // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», – 2010, № 3, С. 26-34, № 4, С. 13-21.

Координатный метод
(применимость и как реагировать эксперту)

Пусть даны две точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Для решения многих задач с применением векторов полезны следующие (кажущиеся, на первый взгляд, формальными) формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}; \quad \cos\,(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пусть прямые a и b имеют направляющие векторы $\vec{p}_1(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{p}_2(b_1;\ b_2;\ b_3)$ и $\varphi = \angle(a;\ b)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Если точка M_0 лежит на плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и искомое расстояние равно нулю, что также следует из полученной формулы

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Задача Найти расстояние от точки до плоскости, если известны координаты точки и уравнение плоскости.

Координатный метод
(применимость и как реагировать эксперту)

Угол между двумя плоскостями α и β, заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, связан с углом между векторами их нормалей $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$. Именно,

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \left|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, равенство $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей α и β.

Угол между прямой и плоскостью можно найти, используя угол между направляющим вектором $\vec{p}(a; b; c)$ прямой l и вектором $\vec{n}(A; B; C)$ нормали к плоскости α:

$$\sin\angle(l;\alpha) = \left|\cos\angle(\vec{p};\vec{n})\right| = \frac{\left|aA + bB + cC\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Бардушкин В.В., Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Методы решения задач по теме «Двугранный угол. Угол между плоскостями». // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», − 2011. − №1. – С. 10-16.

О применении формул аналитической геометрии

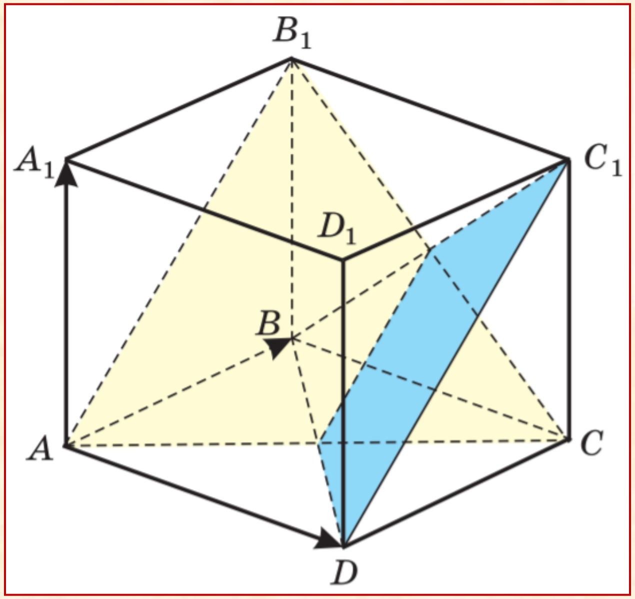
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Векторный и координатный методы (отличие)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и BC_1D.

Векторный метод.



Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, где

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

Векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей AB_1C и BC_1D соответственно. Тогда

$$\overrightarrow{BD_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c};\ \overrightarrow{CA_1}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c};$$

$$\boxed{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2=1;}$$

$$\overrightarrow{BD_1}=\{1;\ -1;\ 1\},\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{CA_1}=\{-1;\ -1;\ 1\},\ \left|\overrightarrow{CA_1}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3};$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3},$$ где φ — искомый угол.

Координатный метод.

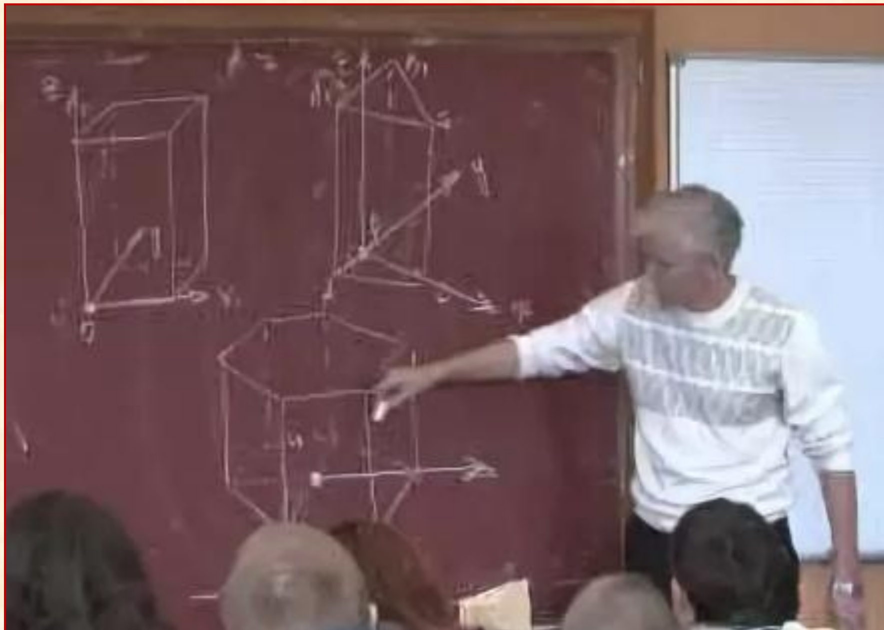
$\overrightarrow{BD_1}=\{1;\ -1;\ 1\}$, $\left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$; $\overrightarrow{CA_1}=\{-1;\ -1;\ 1\}$,

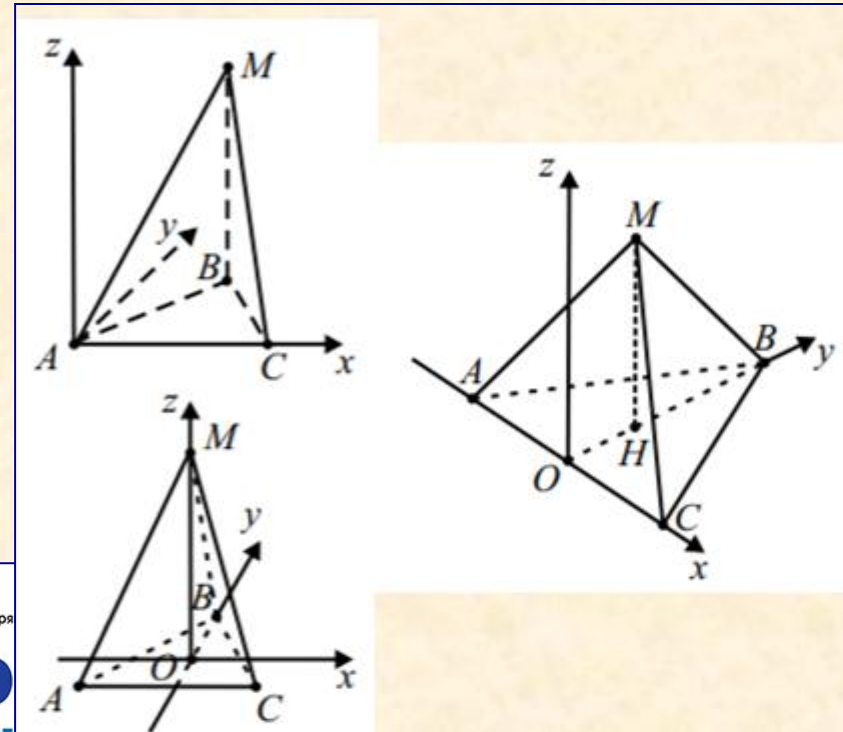
$\left|\overrightarrow{CA_1}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$; $\boxed{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1=1;}$

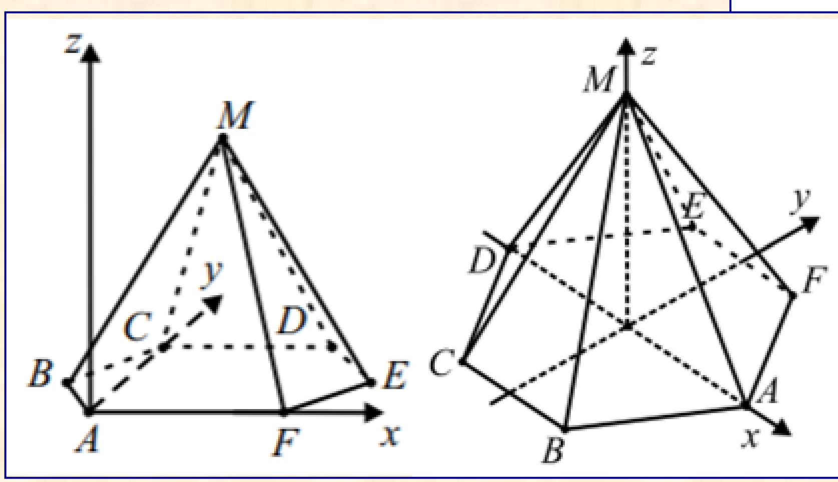
$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

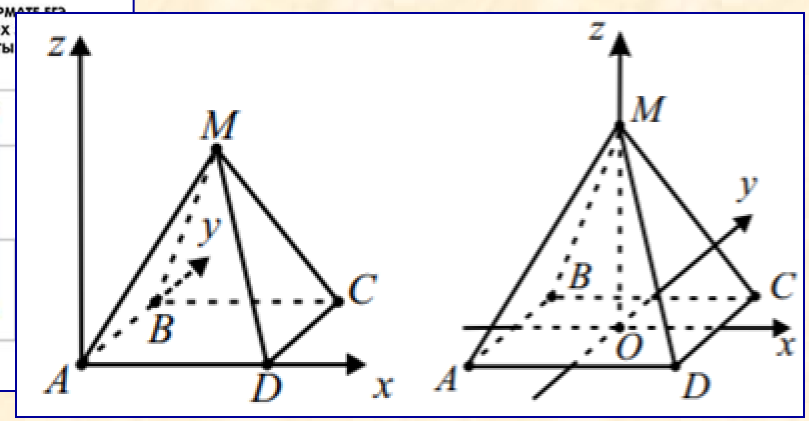
Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

О введении системы координат в пространстве

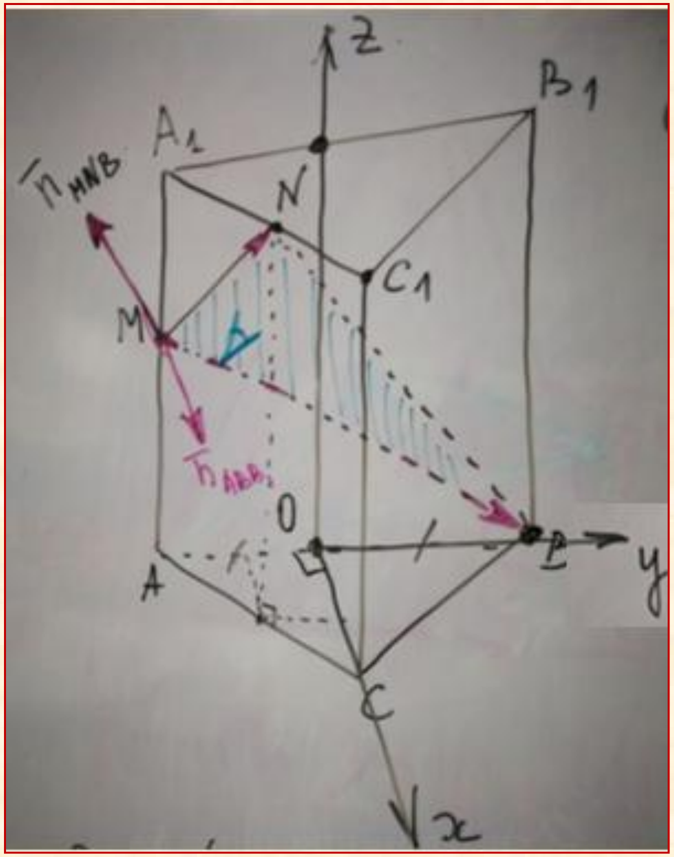








Координатный метод
(решение задания 14 из демонстрационного варианта)



а). $M(0;-3;3)$

$N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};6\right)$

$B(0;3;0)$

$A(0;-3;0)$.

$\overrightarrow{MB}=\{0,6,-3\}$

$\overrightarrow{MN}=\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\right\}$.

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+6\cdot\frac{3}{2}+(-3)\cdot 3=0$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MN}$

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2012, № 10, С. 9-15.

Решение задания 14 из демонстрационного варианта

Угол между плоскостями:

ABB_1: $x=0$ вектор нормали $\overline{n}_{ABB_1}=\{1;0;0\}$

MNB: найдем вектор нормали $\overline{n}_{MNB}$

$\overline{n}_{MNB}=\{a;b;c\}$ $\quad \overline{n}_{MNB}\perp\overrightarrow{MB}$ и

$\overline{n}_{MNB}\perp\overrightarrow{MN}$

$$\begin{cases} a\cdot 0+6\cdot b+(-3)c=0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot a+\frac{3}{2}b+3c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b=c \\ 3\sqrt{3}a+3b+12b=0 \end{cases} \quad a=\frac{-15b}{3\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}b \quad b=1$$

$\overline{n}_{MNB}=\left\{-\frac{5}{\sqrt{3}};1;2\right\}$

$$\cos\angle(BMN,ABB_1)=\left|\cos\angle(\overline{n}_{BMN},\overline{n}_{ABB_1})\right|=\frac{\left|-\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{25}{3}+1+4}\cdot\sqrt{1+0+0}}=\frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{40}{3}}}=\sqrt{\frac{5}{8}}$$

Ответ $\arccos\sqrt{\frac{5}{8}}$.

Ответ отличается от ответа, приведенного в критериях. Там ответ дан через арксинус. Задача эксперта убедиться в совпадении ответов.

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2013, № 1, С. 8-18.

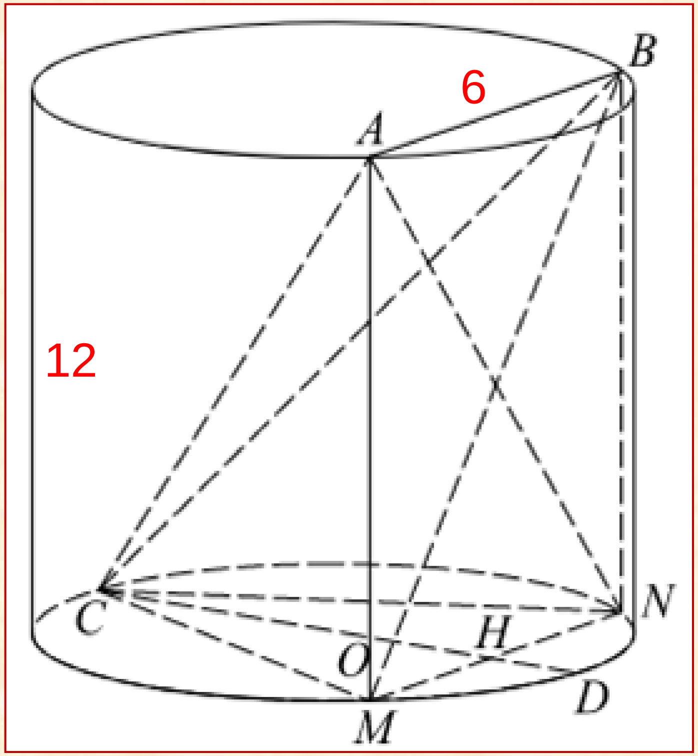
Цилиндр

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Тренировочная работа 2016



Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.

14

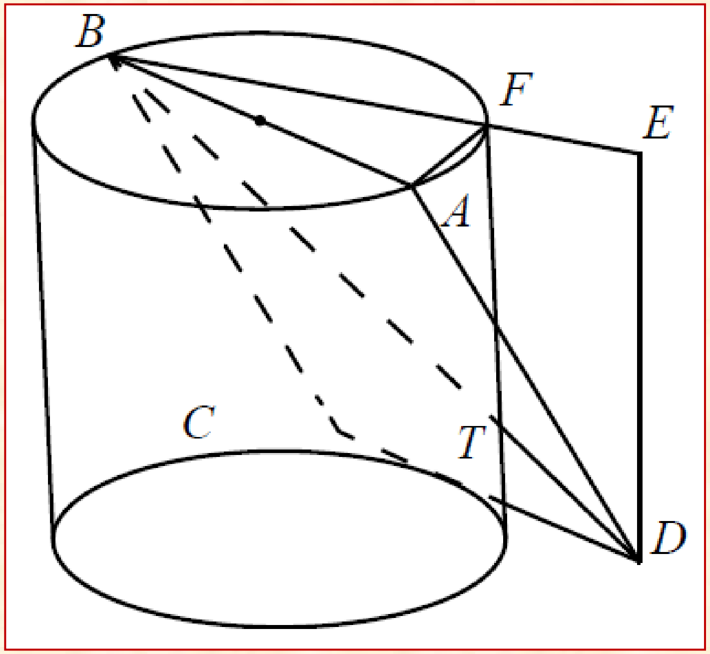
Цилиндр

Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB – диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60^o.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

Тренировочная работа 2017



Ответ: б) 3,2.

14

Конус

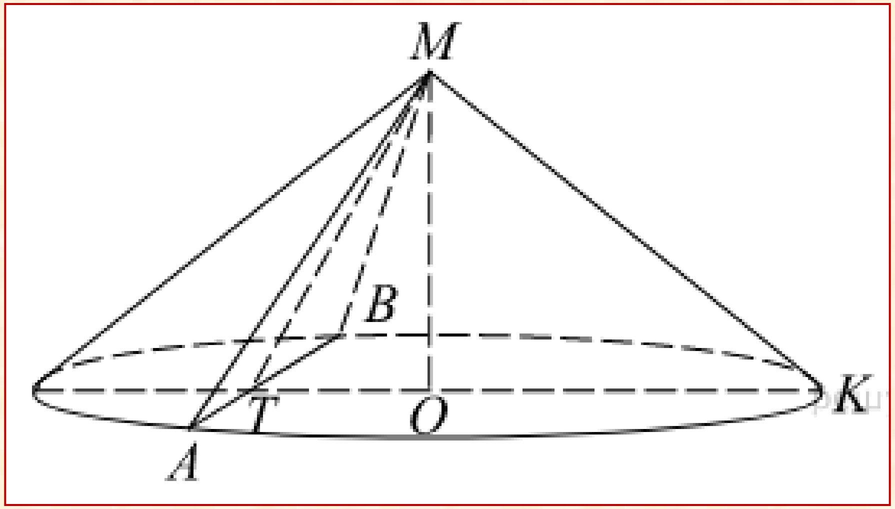
ЕГЭ 2014

Дан прямой круговой конус с вершиной *M*. Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине *M*. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку *M* проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

Тренировочная работа 2016



б) Площадь треугольника *MBA* равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.

14

Шар

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

ЕГЭ 2013

Сечение шара плоскостью – круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Пусть:

FD – радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2$ – площадь сечения меньшего шара плоскостью α;

AB – радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2$ – площадь сечения большего шара плоскостью β;

CF – радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF.

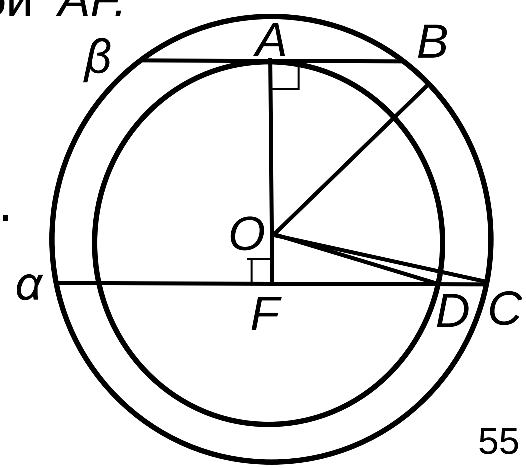
Из прямоугольных треугольников OCF и ODF получаем

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2, \text{ откуда}$$

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 - FD^2.$$

Площадь сечения большего шара плоскостью α равна:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 10.$$



Ответ: 10.

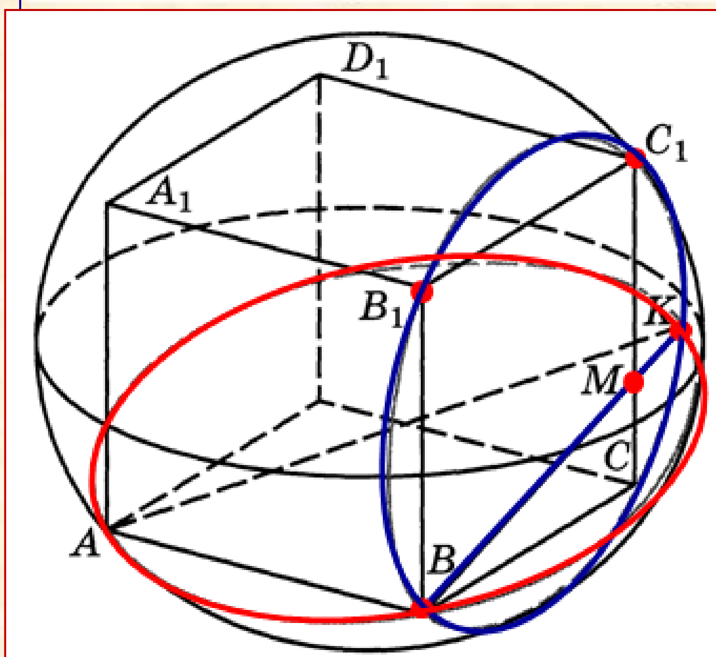
Сечение сферы плоскостью

Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A, B и M, образует угол 15° с плоскостью ABC.

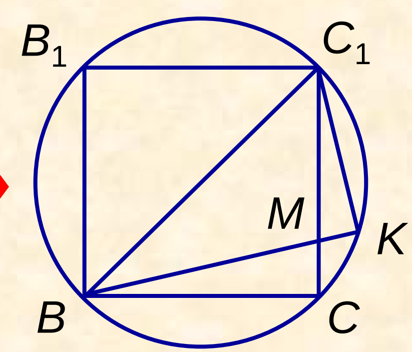
а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A, B и M.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

а) Сечение сферы плоскостью является окружностью. Пусть теперь прямая BM вторично пересекает сферу в точке K – точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата BCC_1B_1. Искомая линия – описанная окружность прямоугольного треугольника ABK.



Выносной чертеж



б) $BK = BC_1 \cdot \cos 30° = \sqrt{6}.$

$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{10}.$

Ответ: $\pi\sqrt{10}.$

Подготовительные задания 14

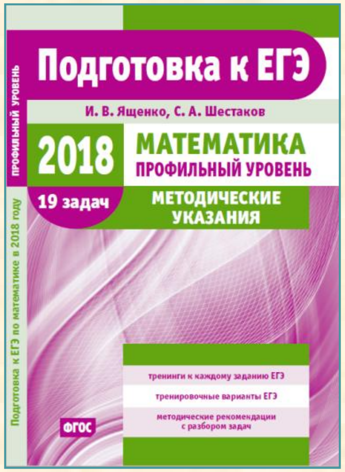
Подготовительные задания

1 Прямые, содержащие рёбра DA и BC треугольной пирамиды $DABC$, взаимно перпендикулярны, $DA = 10$, $BC = 24$.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BD и параллельной прямым AD и BC.
б) Найдите расстояние между серединами рёбер BD и AC.

2 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$ все рёбра равны 10.
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки E, B_1 и C_1.
б) Найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

3 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB = BC = DA = DC = 13$, $DB = 8$, $AC = 24$.
а) Постройте общий перпендикуляр к прямым DB и AC.
б) Найдите расстояние между прямыми DB и AC.

4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2.
а) Постройте общий перпендикуляр к прямым AA_1 и BC_1.
б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен $60°$. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.
а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и PBC, проведённых к стороне BC, совпадают.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP.

6 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$.
а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.
б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

7 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $6\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10.
а) Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из точки K на плоскость квадрата, совпадает с центром квадрата.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.

8 В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$ все рёбра равны 2.
а) Докажите, что плоскость BB_1F перпендикулярна прямой B_1C_1.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

Подготовительные задания 14

9 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.
а) Постройте общий перпендикуляр к прямым SB и AE.
б) Найдите расстояние между прямыми SB и AE.

10 В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD.
а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую AE и перпендикулярной плоскости ABC.
б) Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.

Ответы к подготовительным заданиям 14

Задача 14. Подготовительные задания

1. 13. **2.** 20. **3.** 3. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 1,5. **6.** $\operatorname{arctg}\sqrt{10}$. **7.** 8. **8.** $\sqrt{3}$. **9.** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.
10. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Зачетные задания 14

Зачётные задания

1 Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.
б) Найдите тангенс угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

2 Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20.
а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная AC и проходящая через точку D, проходит через точку B.
б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

3 Высота правильной треугольной пирамиды равна 16, а медиана её основания равна 8.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.
б) Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

Зачетные задания 14

4 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.
б) Найдите площадь этого сечения.

5 Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 12. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $PB_1 = 3PB$.
а) Докажите, что основания высот треугольников ACP и ACB_1, проведённых к стороне AC, совпадают.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACP и ACC_1.

6 Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.
а) Докажите, что сумма расстояний от этих хорд до оси цилиндра равна 14.
б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Зачетные задания 14

7 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB = AC = DB = DC = 13$, $DA = 6$, $BC = 24$.

а) Постройте общий перпендикуляр к прямым DA и BC.

б) Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

8 Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$ на расстояние, равное 10, а от плоскости квадрата — на расстояние, равное 8.

а) Докажите, что плоскость AKC перпендикулярна отрезку BD.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости AKC.

9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что основания высот треугольников A_1B_1C и $A_1B_1C_1$, проведённых к стороне A_1B_1, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.

10 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Постройте плоскость, проходящую через точку S и перпендикулярную ребру AF.

б) Найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.

Ответы к зачетным заданиям 14

Зачётные задания

1. 5. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 6. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru