НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Московский институт электронной техники»

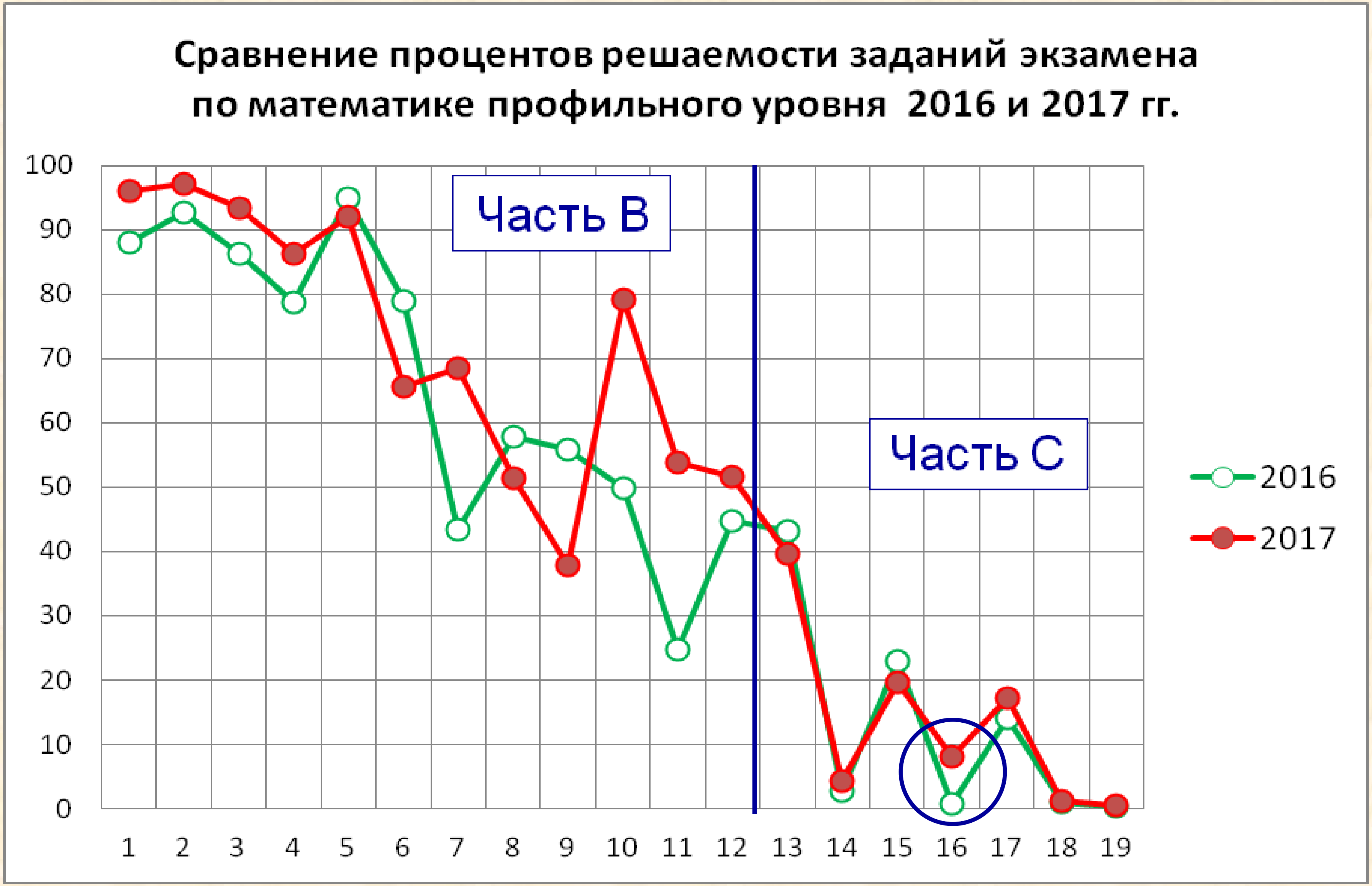
Зеленоград 6 января 2018

Рекомендации по подготовке к выполнению ЗАДАНИЯ №16 (планиметрия) ЕГЭ профильного уровня

Прокофьев Александр Александрович,

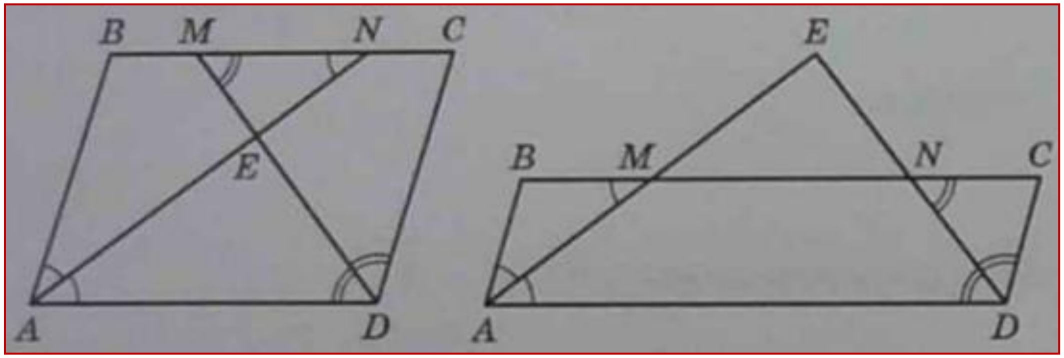
Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»

Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.

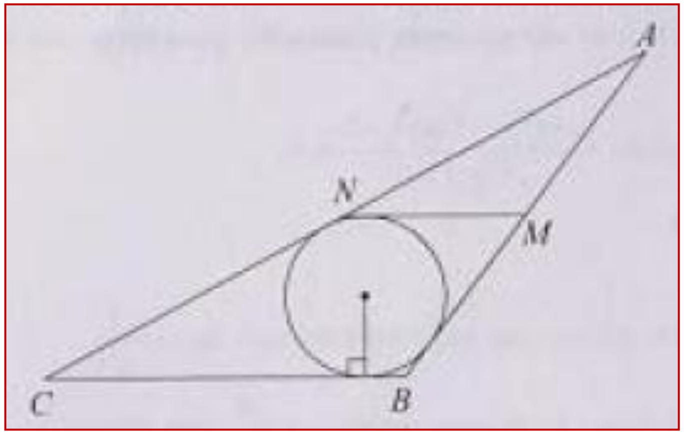


Примеры заданий С4 (№16 с 2015 г.) в ЕГЭ 2010-2012 гг.

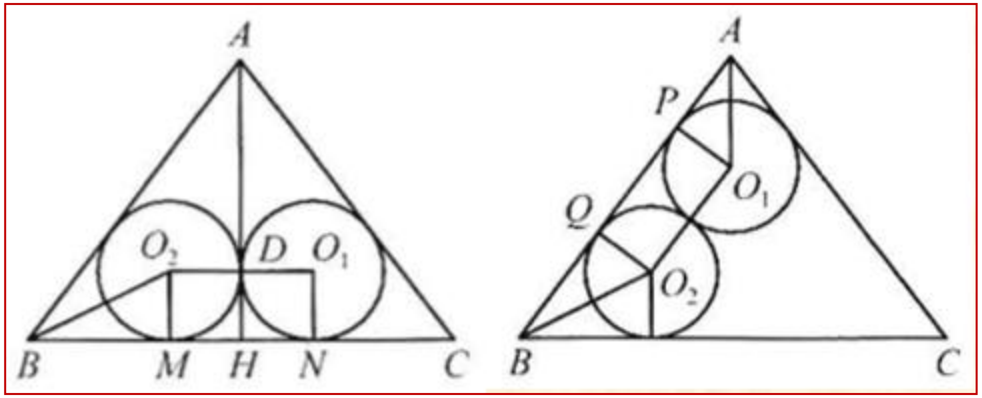
ЕГЭ 2010. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов при стороне *AD* делят сторону *BC* точками *M* и *N* так, что *DM* **:** *MN* = 1 **:** 5. Найдите Сторону *BC*, если *AB* = 3.



ЕГЭ 2011. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, площадь которого равна 36, касается Средней линии, параллельной стороне *BC*. Известно, что *BC*=9. Найдите сторону *AB*.



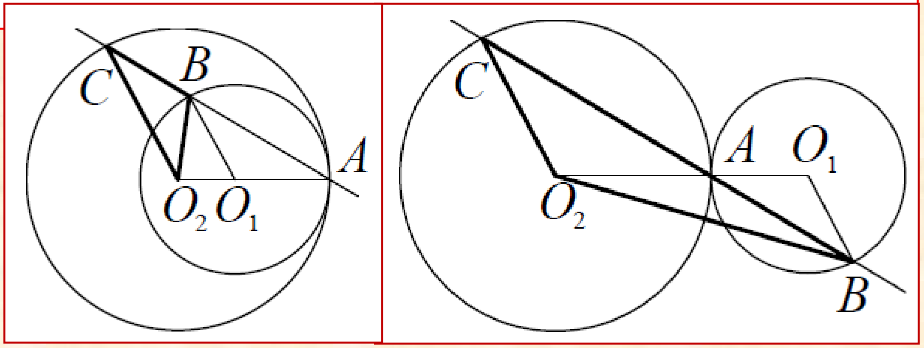
ЕГЭ 2012. Дан треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри него расположены две касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.



Примеры заданий С4 (№16 с 2015 г.) в ЕГЭ 2013-2014 гг.

Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

ЕГЭ 2013

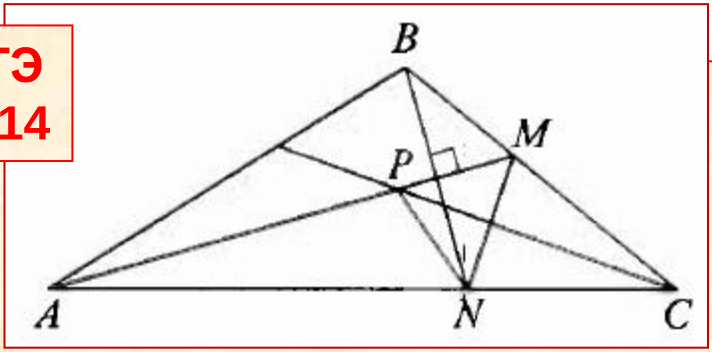


В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N; $AB = 12$, $BC = 7$, $AC = 16$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

ЕГЭ 2014

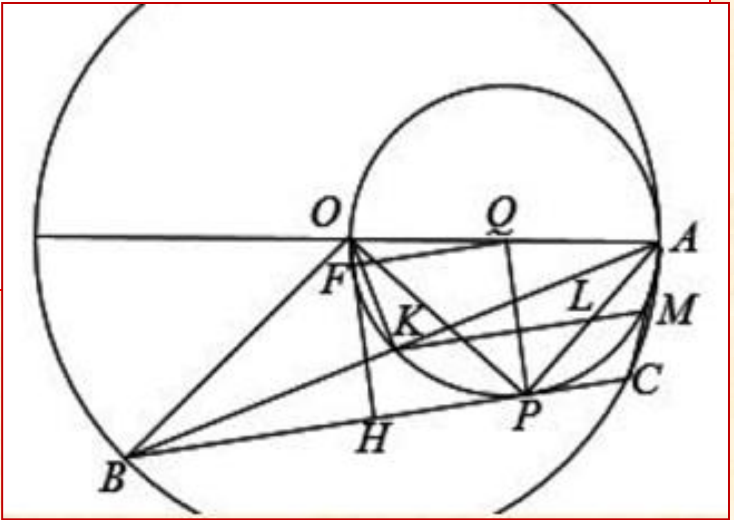


Примеры заданий С4 (№15 с 2015 г.) в ЕГЭ 2015-2016 гг.

ЕГЭ 2015. Две окружности касаются внутренним образом в точке *A*, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда *BC* большей окружности касается меньшей в точке *P*. Хорды *AB* и *AC* пересекают меньшую окружность в точках *K* и *M* соответственно.

а) Докажите, что прямые *KM* и *BC* параллельны.

б) пусть *L* – точка пересечения отрезков *KM* и *AP*. Найдите *AL*, если радиус большей окружности равен 10, а *BC* = 16.



Процент решаемости 0,8%

ЕГЭ 2016

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 40°$.

Процент решаемости 0,…%

Примеры заданий С4 (№15 с 2015 г.) в ЕГЭ 2016-2017 гг.

ЕГЭ 2016

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Процент решаемости 0,7%

ЕГЭ 2017

Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

Процент решаемости 8,6%

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от O. Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

Процент решаемости 4,9%

Пример решения задания 16 из демоверсии ЕГЭ 2018 (профильный уровень)

1

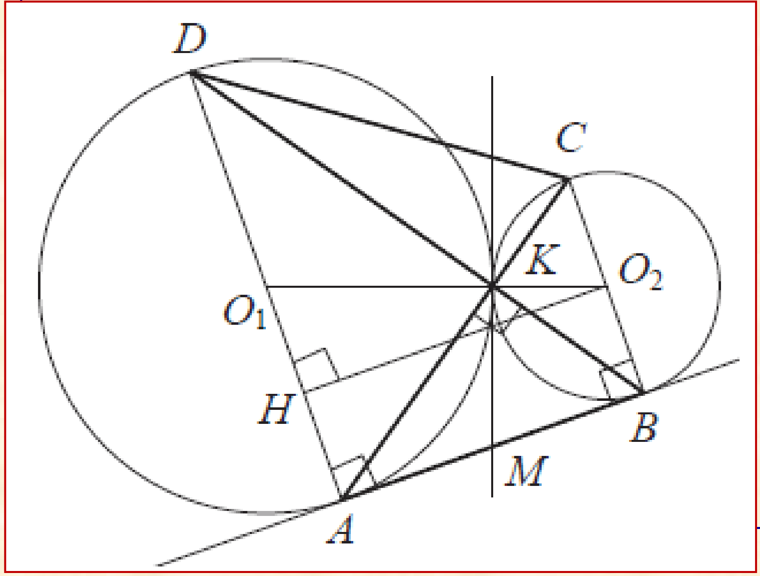
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

а) По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. В треугольнике AKB медиана $KM = 0{,}5AB$. Значит, он прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.



б) $AB = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2} = 4$ (опорная задача).

$S_{ADB} = 0{,}5 \cdot AD \cdot AB = 16.$

$DB^2 = AD^2 + AB^2 = 80$ (теорема Пифагора для треугольника ADB).

$S_{AKB} : S_{ADB} = (AB : DB)^2 = 16 : 80 = 1 : 5.$

$S_{AKB} = 3{,}2.$

Ответ: 3,2.

Критерии проверки задания 16

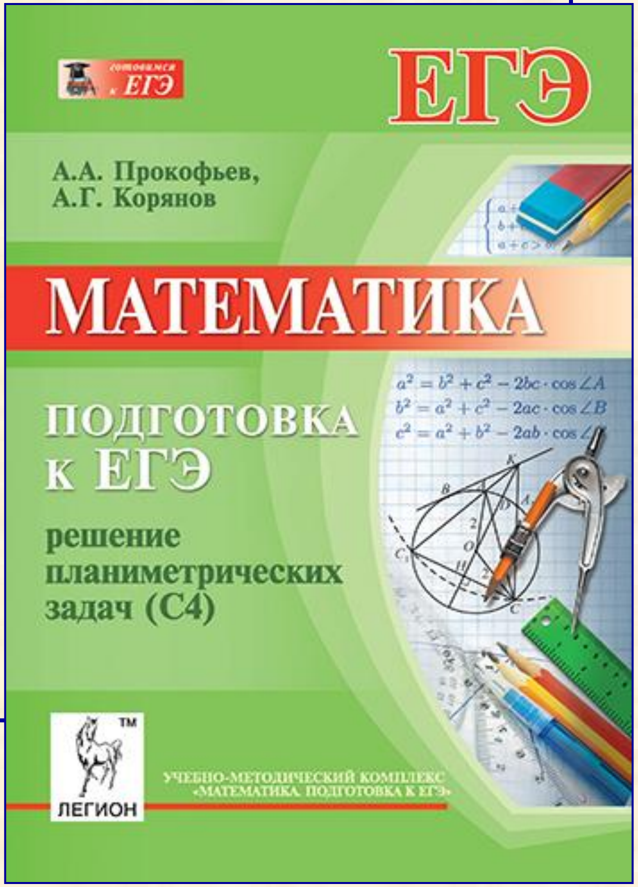
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Создано разработчиками ЕГЭ

Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел 14 – 20 – 36 – 50?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. по заданию 16 издательства Легион

Оглавление



Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. на сайте http://alexlarin.net/


МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2013

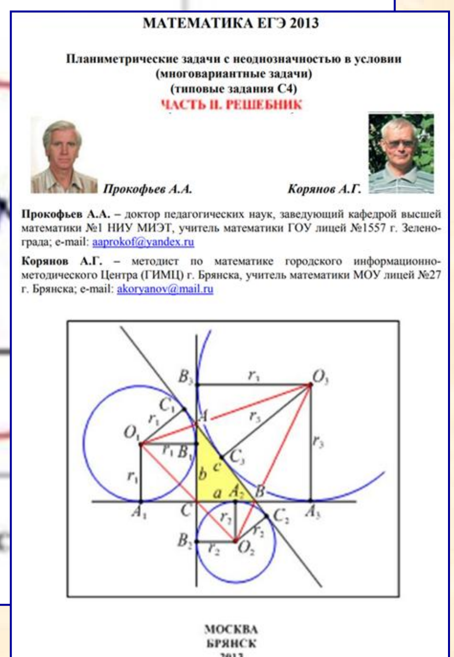
Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии
(многовариантные задачи)
(типовые задания С4)

Прокофьев А.А. Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

МОСКВА &БРЯН[...]
2014


МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2013

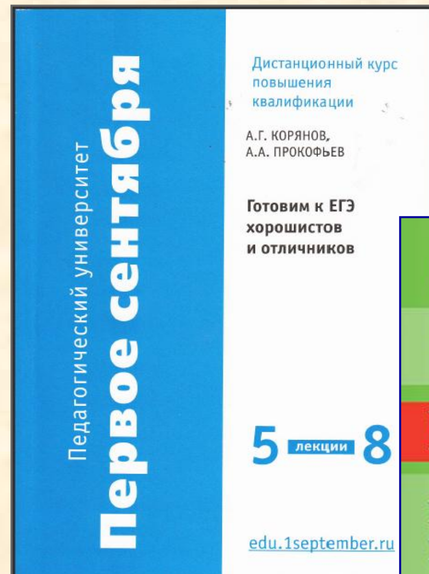
Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии
(многовариантные задачи)
(типовые задания С4)
ЧАСТЬ II. РЕШЕБНИК

Прокофьев А.А. Корянов А.Г.

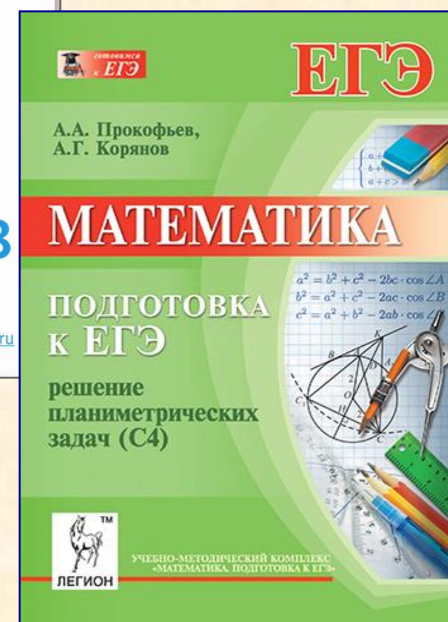
Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

МОСКВА
БРЯНСК
2013



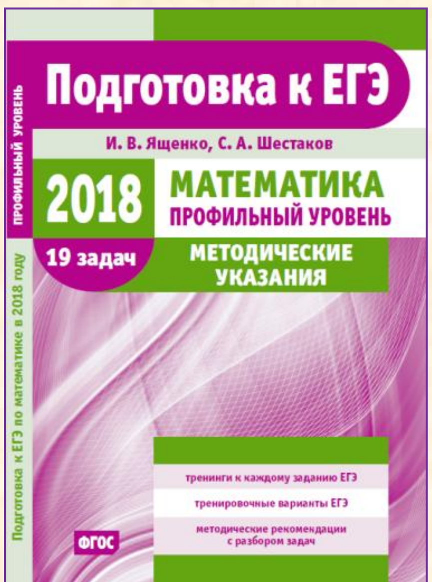
Издательство Легион



Что можно ожидать в качестве задания 16 на экзамене?

Задание 16

Тип задания по кодификатору требований	Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).
Характеристика задания	Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.
Комментарий	Довольно сложная задача, либо с двумя вопросами (один из которых — на доказательство), либо требующая рассмотрения двух случаев и приводящая к двум разным ответам.



О сколько нам открытий чудных
Готовят …

Типичные ошибки в решениях задания 16

Типичные ошибки участников экзамена связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства. Например, доказательство пункта *а* задания 16 часто начинается так:

«Пусть точка *O* является серединой отрезка *CK*…» – в случае, когда нужно доказать, что точка делит отрезок пополам;

«Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда …» – в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный. И т. д.

При выполнении второго пункта участники:

– допускают ошибки в геометрических формулах (например, в отношении площадей подобных фигур);

– не различают свойства и признаки геометрических фигур (признак прямоугольного треугольника, признаки и свойства ромба, и т. д.);

– не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решение.

Кроме этого участники экзамена допускают большое количество ошибок при построении чертежа.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 5-8. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 100 с.

Особенности первого пункта задания 16

1. В случае, если заданная конфигурация не является однозначной, должны быть рассмотрены все ее реализации и должно быть доказано, что в каждой из них выполняется указанное свойство.

2. Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта *а*. Условие до пункта *а* задания:

– не содержит числовых данных (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте *а*, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);

ЕГЭ 2017

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.
а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

– содержит числовые данные (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

ЕГЭ 2017

Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

Особенности первого пункта задания 16

3. В большинстве заданий решение пункта *а* сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

а) подобия указанных треугольников;

б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;

в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;

г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:

- треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
- четырехугольник является описанным (четыре точки лежат на одной окружности) или вписанным;
- четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
- точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
- прямая содержит указанные точку или отрезок.

Особенности второго пункта задания 16

1. Для выполнения второго пункта задачи на нахождение требуемых величин в заданной геометрической фигурации нужно помнить основные формулы для вычисления соответствующих элементов:

а) для линейных – это теоремы: Пифагора, косинусов, синусов, о секущих и касательных, о хордах; формулы: длины медианы, биссектрисы и т.д.;

б) для угловых – это теоремы: косинусов, синусов, об измерении углов, связанных с окружностью (центральных, вписанных, не вписанных, между хордой и касательной) и т.д.;

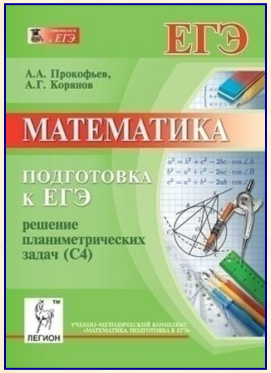
в) для площадей – это теоремы: об отношении площадей: – подобных фигур; – фигур, имеющих равные элементы; формулы вычисления площадей треугольника и многоугольников, круга и его частей и т.д.

г) отношений отрезков или площадей фигур – это теоремы: Фалеса, о пропорциональных отрезках, о метрических соотношениях в треугольнике и круге, об отношении соответствующих элементов подобных фигур и т.д.

2. Может оказаться, что пункт *б* задания 16 может быть выполнен без использования свойства, сформулированного в пункте *а*.

Нюансы начальной подготовки к овладению методами решения задания 16

Для успешного решения заданий 16 необходимо знать и правильно использовать:



- признаки равенства и подобия треугольников;
- свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника;
- формулы вычисления площади треугольника;
- свойство биссектрисы угла в треугольнике;
- теорему синусов и теорему косинусов для треугольника;
- теоремы: – об отрезках касательных, проведенных к окружности из одной точки; – о касательной и секущей; – о секущих, проведенных из одной точки; о хордах;
- теоремы о нахождении углов, связанных с окружностью: о нахождении вписанного угла; угла с вершиной внутри круга и вне круга; угла между касательной и хордой;
- утверждения об отношении площадей двух треугольников: – имеющих общее основание: – имеющих равный угол; – на которые разбивает исходный треугольник биссектриса угла;
- теорему об отношении площадей подобных фигур;
- теоремы и факты, связанные с трапецией.

1. ТРЕУГОЛЬНИКИ и связанные с ними окружности

Важно знать (основные теоремы и формулы)

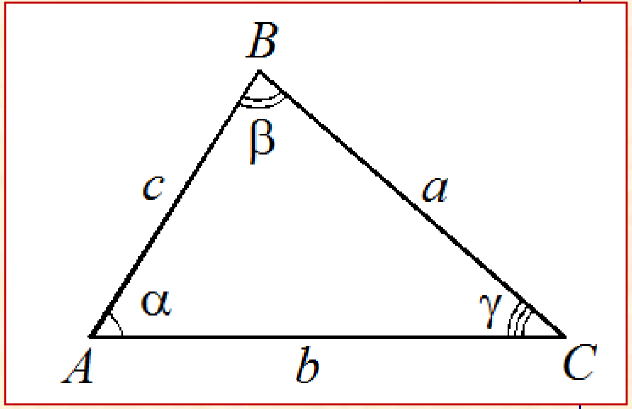
Теорема. Во всяком треугольнике:

1) против равных сторон лежат равные углы (и наоборот);
2) против большей стороны лежит больший угол (и наоборот).

Теорема (неравенство треугольника). Для любых трех точек, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от каждой из них до третьей точки.

Следствие. Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон ($a+b>c, a+c>b, b+c>a$).

Теорема косинусов: $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha.}$



Следствие. $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

Теорема синусов: $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R,}$

где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Формулы для вычисления площади треугольника:

$$\boxed{S=\frac{h_a a}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.}$$

Пример задания 16 и его решение

2

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

ЕГЭ 2016

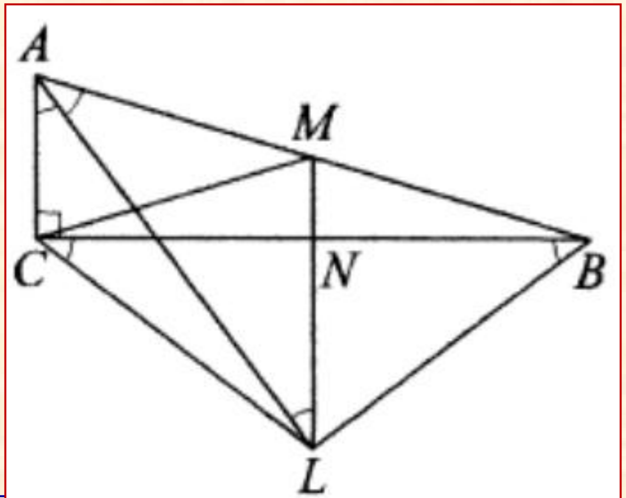
а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.

а) Прямая ML параллельна прямой AC, так как содержит среднюю линию треугольника ABC. Следовательно, $\angle ALM = \angle LAC = \angle LAM$.

Таким образом, $LM = AM = BM = CM$, то есть точки A, B, C и L лежат на окружности с центром в точке M. Получаем:

$$\angle LBC = \angle LAC = \angle LAB = \angle LCB,$$



б) Углы ALB и ACB опираются на одну дугу, значит, $\angle ALB = 90°$.

Коэффициент подобия треугольников BLC и AML равен $\frac{LB}{AM} = \frac{2LB}{AB} = 2\sin\angle LAB$.

По условию $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$, откуда

$$1 - 2\sin^2\angle BAL = \frac{7}{25};\ \sin^2\angle BAL = \frac{9}{25};\ \sin\angle BAL = \frac{3}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{25}{36}$.

Значит, $\frac{AM}{LB} = \frac{5}{6}$ и площади треугольников AML и BLC относятся как $\frac{25}{36}$.

Пример задания 16 и его решение

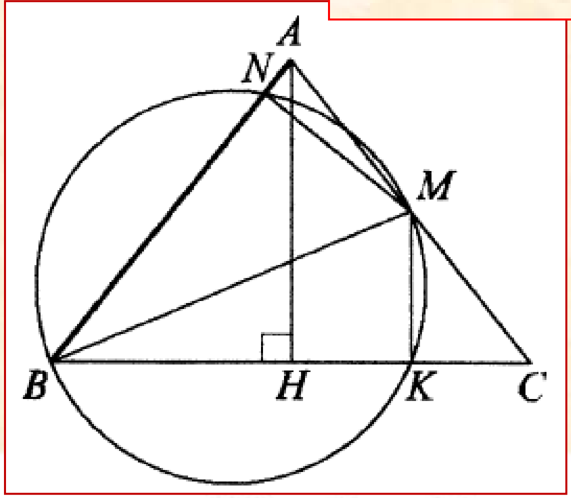
3

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK=9$ и $BN=11$.

ЕГЭ 2015



а) Пусть AH — высота треугольника ABC. Точка K лежит на окружности с диаметром BM, поэтому $\angle BKM=90°$, значит, прямые MK и AH параллельны. MK – средняя линия треугольника AHC. Тогда K — середина CH, следовательно,

$$CK=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}BC,\quad BK=3CK.$$

б) Положим $AB=AC=2x$, $\angle BAC=\alpha$. Тогда $AM=x$, $AN=2x-11$. В прямоугольном треугольнике AMN: $\cos\alpha=\frac{AN}{AM}=\frac{2x-11}{x}$.

Имеем $BC=BK+CK=9+3=12$, значит, по теореме косинусов

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{4x^2+4x^2-12^2}{2\cdot 2x\cdot 2x}=\frac{x^2-18}{x^2}.$$

Из уравнения $\frac{x^2-18}{x^2}=\frac{2x-11}{x}$ находим, что $x=2$ или $x=9$. В первом случае $AN=2x-11=-7$. Второе решение удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $AB=2x=18$.

Ответ: б) 18.

Пример задания 16 и его решение

4

В треугольнике ABC угол ABC равен $60°$. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

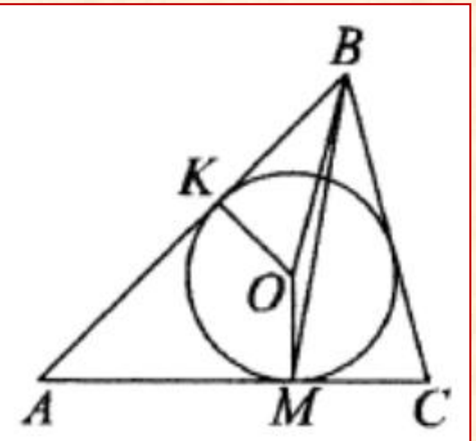
ЕГЭ 2016

б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

а) Пусть O — центр вписанной в треугольник окружности, r — её радиус, а K — точка касания со стороной AB. Тогда $\angle KBO = 30°$, поскольку точка O лежит на биссектрисе угла ABC. Значит,

$$BO = \frac{KO}{\sin\angle KBO} = 2r.$$

Имеем: $BM \le BO + OM = 2r + r = 3r$.



б) Заметим, что $\sin\angle BMC = \cos\angle BMO$. В треугольнике BOM имеем:

$$BO = 2r,\ OM = r,\ BM = 2{,}5r.$$

По теореме косинусов получаем:

$$\cos\angle BMO = \frac{BM^2 + OM^2 - BO^2}{2BM \cdot OM} = \frac{6{,}25r^2 + r^2 - 4r^2}{2 \cdot 2{,}5r\ r} = \frac{13}{20},$$ откуда $\sin\angle BMC = \frac{13}{20}$.

Ответ: б) $\frac{13}{20}$.

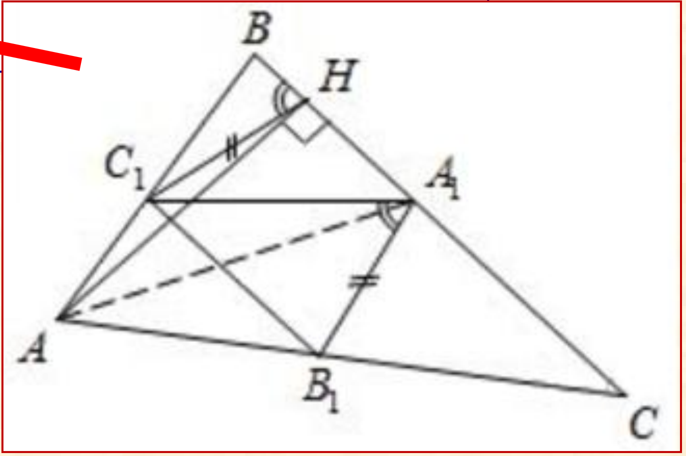
Пример задания 16 и его решение

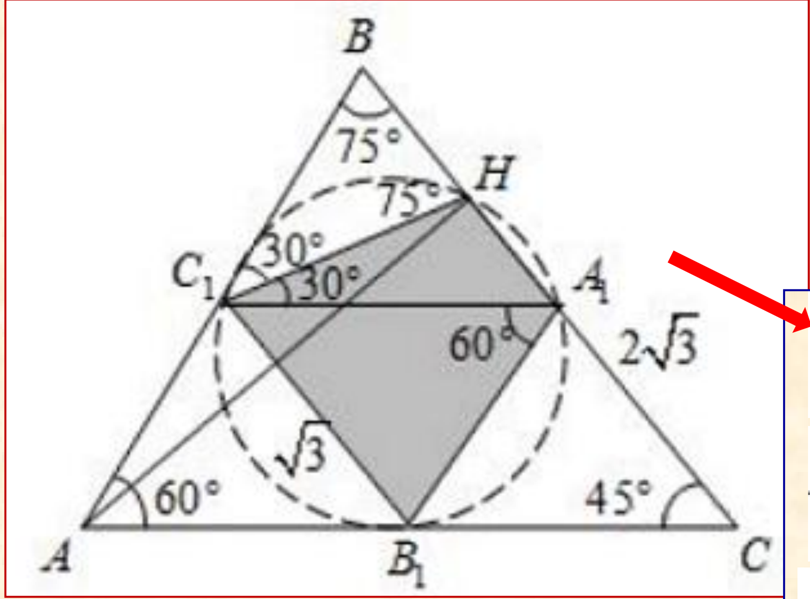
5

В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, угол BAC равен 60°, угол BCA равен 45°.
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если BC равно $2\sqrt{3}$.

ЕГЭ 2017

а) Заметим, что C_1H – медиана прямоугольного треугольника ABH. $C_1HA_1B_1$ – равнобедренная трапеция.





б) $2R = \dfrac{HA_1}{\sin\angle HC_1A_1} = \dfrac{B_1C_1}{\sin\angle C_1A_1B_1}$, откуда

$$HA_1 = \sqrt{3}\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 1.$$

Ответ: б) 1.

Пример заданий 16 (вид треугольника)

6

Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 14$, $BC = 8$ и *медианой* $BM = 9$.
а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины B.

Ответ: б) $\frac{24\sqrt{5}}{7}$.

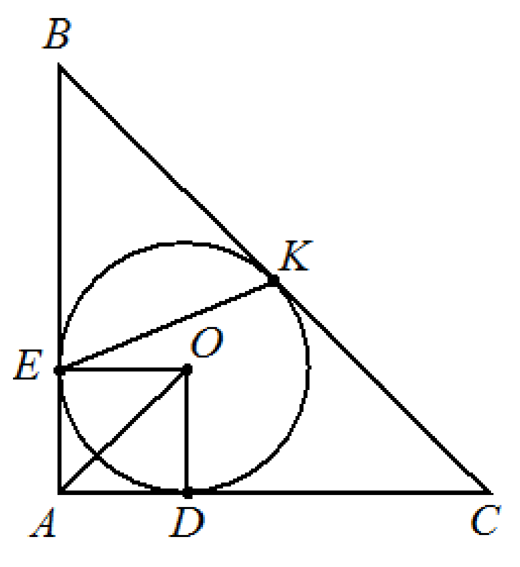
7

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, что $AC = 30$.

Ответ: б) 2.

8

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.
а) Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и K соответственно. Найти площадь треугольника BEK, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.



Ответ: б) 40.

Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Геометрия. Полный справочник. (Для школьников и абитуриентов). – М.: Махаон, − 2006. – 320 с.

9

Опорная задача

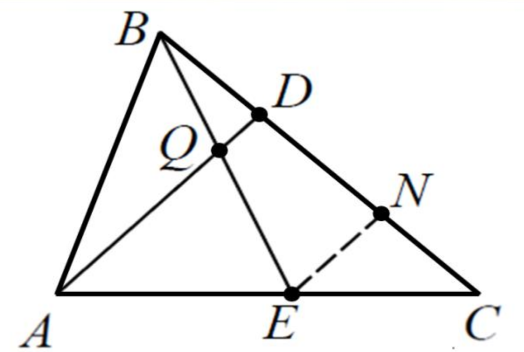
В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в отношении $BD : DC = m : n$ и $AE : EC = p : q$. В каком отношении прямая AD делит отрезок BE?

Проведем отрезок $EN \parallel AD$. $\dfrac{DN}{NC} = \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{p}{q}$ и $NC = \dfrac{q}{p} DN$.

Откуда $DC = DN + NC = \dfrac{p+q}{p} DN$. $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{m}{n}$ и значит

$BD = \dfrac{m}{n} DC = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p+q}{p} DN$.

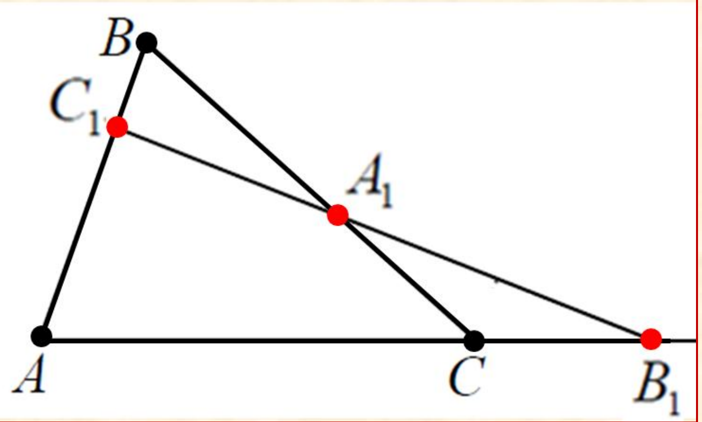
В треугольнике BNE $QD \parallel EN$ и $\dfrac{BQ}{QE} = \dfrac{BD}{DN}$.



Ответ: $\dfrac{m}{n} \cdot \left(1 + \dfrac{q}{p}\right)$.

Теорема Менелая. Если в треугольнике ABC на сторонах BC, AC и AB (или их продолжениях) выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, не совпадающие с вершинами треугольника, то точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

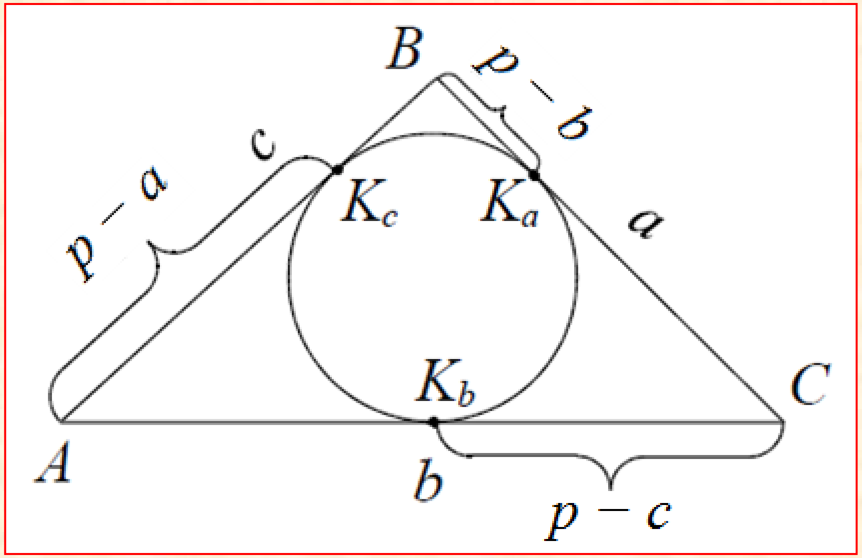


Опорная задача

10

В треугольник со сторонами a, b, c вписана окружность. Найти расстояния от вершин треугольника до точек касания.

Пусть p – полупериметр треугольника. Рассмотрим вершину A (см. рис.). Отрезки $AK_c = AK_b$, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. Аналогично $BK_c = BK_a$ и $CK_a = CK_b$.
Заметим, что длина ломаной $K_cBCK_b = 2BK_a + 2K_aC = 2a$.
Тогда $AK_c = AK_b = (2p - 2a)/2 = p - a$.
Аналогично получаем $BK_c = BK_a = p - b$, $AK_a = CK_b = p - c$.



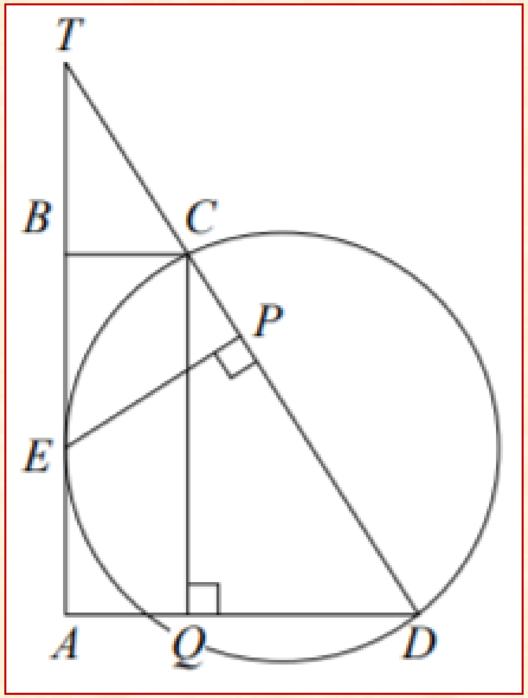
2. ОКРУЖНОСТИ
и различные геометрические конфигурации, связанные с ними

Пример решения задачи (теорема о секущей и касательной)

11

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 20$, $BC = 10$.

ОГЭ



Пусть T – точка пересечения прямых AB и CD, P – проекция точки E на прямую CD, Q – проекция точки C на прямую AD. Обозначим $CD = x$. Поскольку

$$QD = AD - AQ = AD - BC = 10,$$

из равенства прямоугольных треугольников ТВС и CQD находим, что $TC = x$.

По теореме о касательной и секущей

$$TE^2 = TD \cdot TC = 2x^2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{10 \cdot x\sqrt{2}}{x} = 10\sqrt{2}.$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Вневписанные окружности прямоугольного треугольника. «Потенциал». − М.: МФТИ, – 2013. – №10. – С. 22-31.

Пример решения задачи (теорема о секущей и касательной)

12

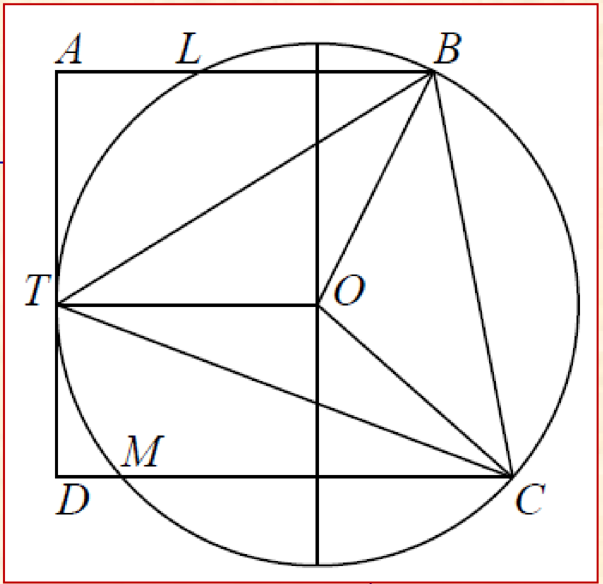
Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

Тренировочная работа 2018

а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.



б) Обозначим $OT = r$, тогда

$AL = 2r - AB = 2r - 4$, $DM = 2r - CD = 2r - 9$.

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$.

По теореме о касательной и секущей

$AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r-4)$. Следовательно,

$TB^2 = 4(2r-4) + 4^2 = 8r$. Аналогично $TC^2 = 18r$.

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$.

Пусть h – искомое расстояние. Выразим площадь треугольника BTC

двумя способами: $\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC$. Отсюда

$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin\angle BTC$. Следовательно, $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.

Ответ: 6.

Пример задания 16 и его решение

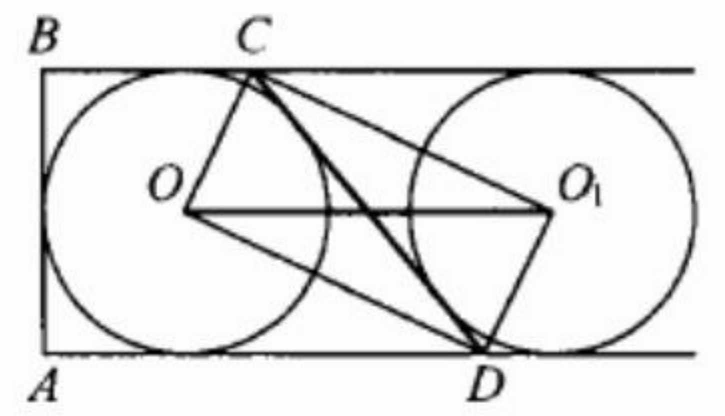
13

Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

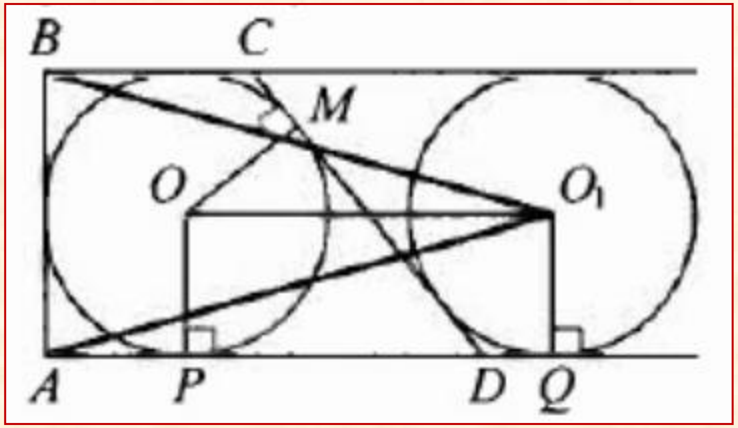
ЕГЭ 2014

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.



Теорема. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.



а) $\angle COD = 180° - \frac{1}{2}\angle BCD - \frac{1}{2}\angle ADC = 90°$

OCO_1D — прямоугольник, поэтому $CD = OO_1$.

б) В прямоугольном треугольнике COD имеем: $OM = \sqrt{CM \cdot MD} = 10$.

$AQ = AP + PQ = OP + OO_1 = OM + CD = 62$.

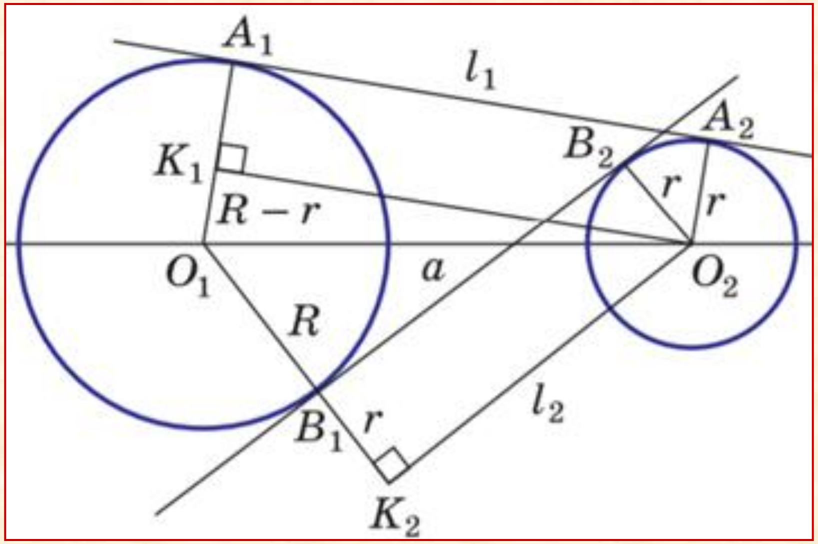
В прямоугольном треугольнике AQO_1 имеем: $AO_1 = \sqrt{AQ^2 + QO_1^2} = 2\sqrt{986} = BO_1$.

Ответ: б) $2\sqrt{986}$.

Взаимное расположение окружностей (опорные задачи)

Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

1. Расположение центров окружностей относительно общей касательной



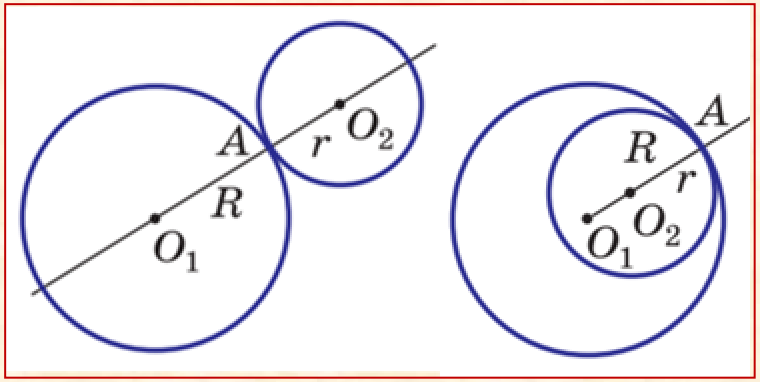
Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно a, $R > r$ и $a > r + R$. Найти расстояние между точками касания.

Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Прокофьев А.А., Соколова Т.В. Окружность в задачах (на материалах вступительных экзаменов в МИЭТ). «Математика», – 2005. – №19. – С. 39-48.

Прокофьев А.А., Соколова Т.В. Окружность в задачах (на материалах вступительных экзаменов в МИЭТ). «Математика», – 2005. – №24. – С. 38-40.

2. Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания



При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.

При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.

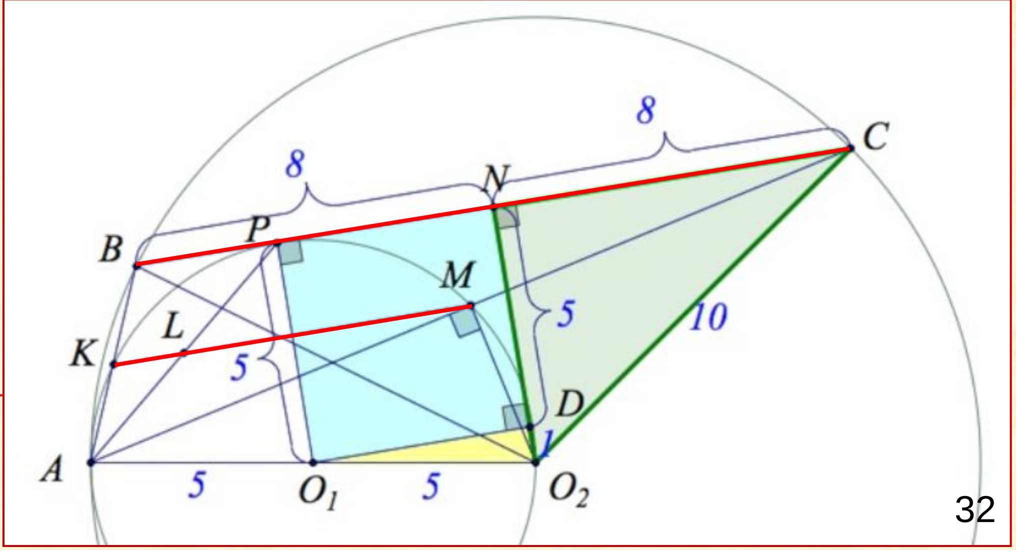
Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r $(R \geq r)$ равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.

14

Две окружности касаются внутренним образом в точке *A*, причем меньшая проходит через центр большей. Хорда *BC* большей окружности касается меньшей в точке *P*. Хорды *AB* и *AC* пересекают меньшую окружность в точках *K* и *M* соответственно.

а) Докажите, что прямые *KM* и *BC* параллельны.

б) Пусть точка *L* – точка пересечения отрезков *KM* и *AP*. Найдите *AL*, если радиус большей окружности равен 10, а *BC* = 16.



ЕГЭ 2015

Ответ: $\sqrt{10}.$

15

Пример задания 16 и его решение

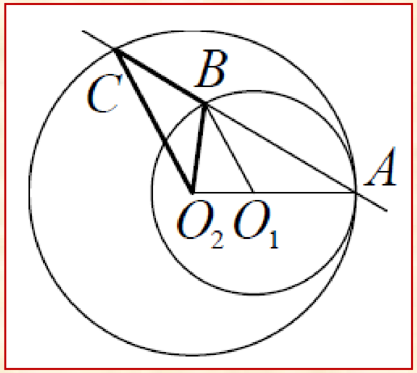
Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

ЕГЭ 2013

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.

$\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$,

$AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 9\sqrt{3}$.

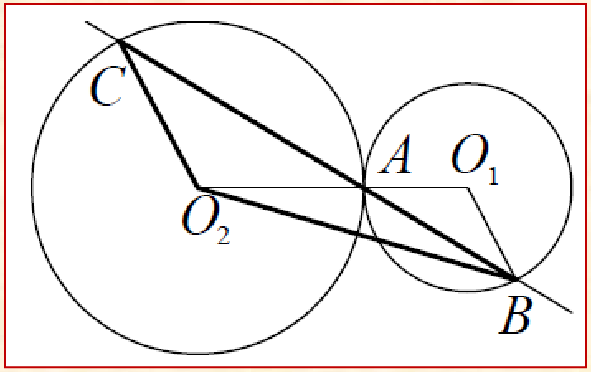


Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом, тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом, тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 12\sqrt{3}$.

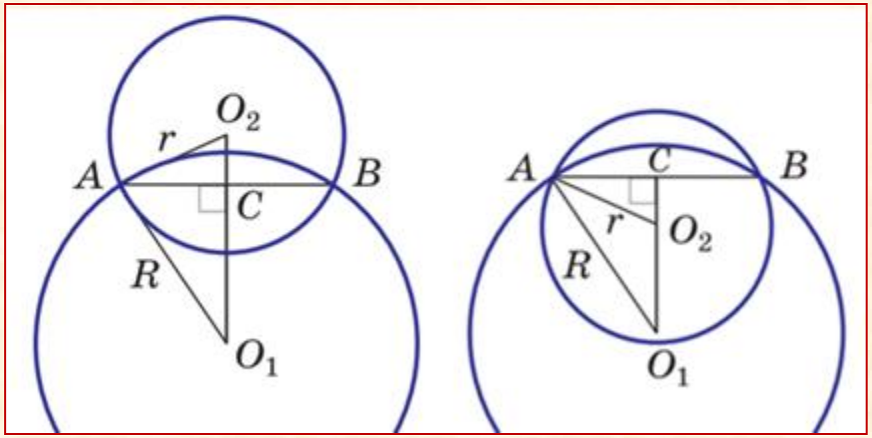
$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 27\sqrt{3}.$$



Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

Прокофьев А.А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия). – 4-е изд., перераб. и доп., – М.: МИЭТ, 2007, 232 стр.

3. Расположение центров окружностей относительно их общей хорды



Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.

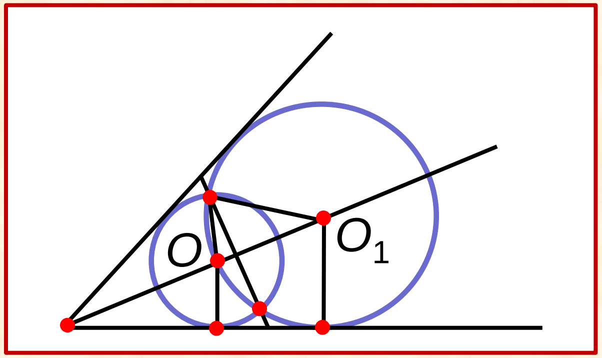
Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

16

Окружность с центром *O* вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку *O.*

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

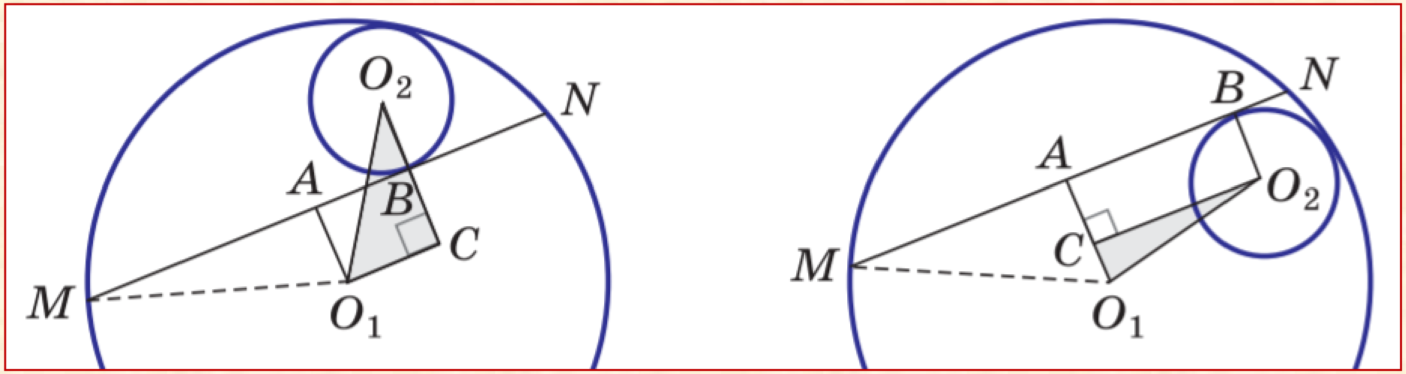
б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.



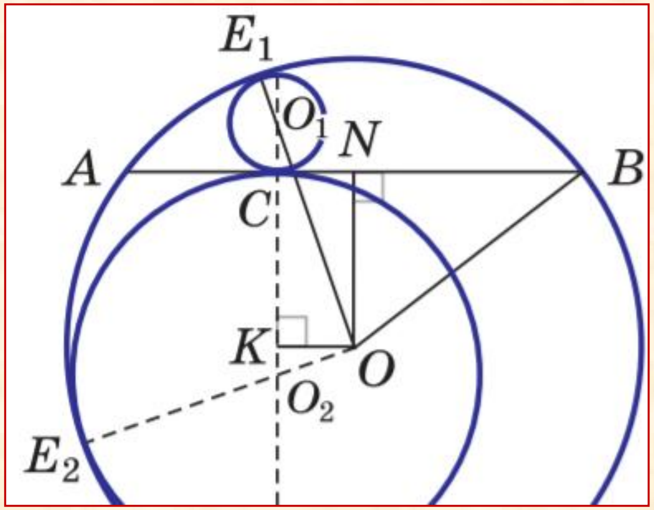
Ответ: 15.

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Вневписанные окружности прямоугольного треугольника. «Потенциал». − М.: МФТИ, – 2013. – №10. – С. 22-31.

4. Расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности



Вычисления в этой задаче сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике O_1O_2C, при этом расстояние O_1A находится из теоремы Пифагора для треугольника MAO_1.



(*ЕГЭ-2010*) В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB = 24$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

17

Ответ: $\frac{8}{3}$ и $\frac{32}{3}$.

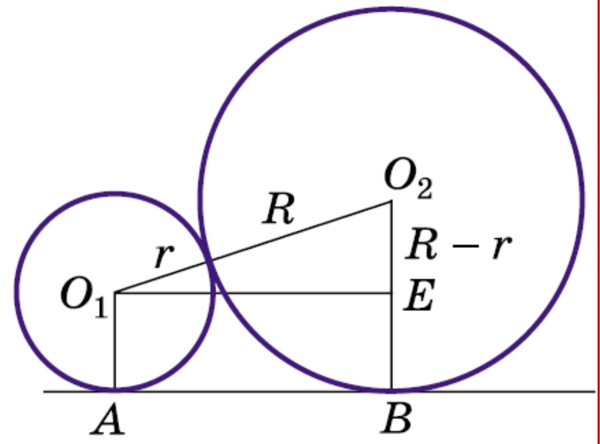
5. Расположение точек касания окружности и прямой (частный случай пункта 1)

Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

Доказательство. Из прямоугольного треугольника O_1O_2E получаем:

$$AB = O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - EO_2^2} =$$

$$= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$



1

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

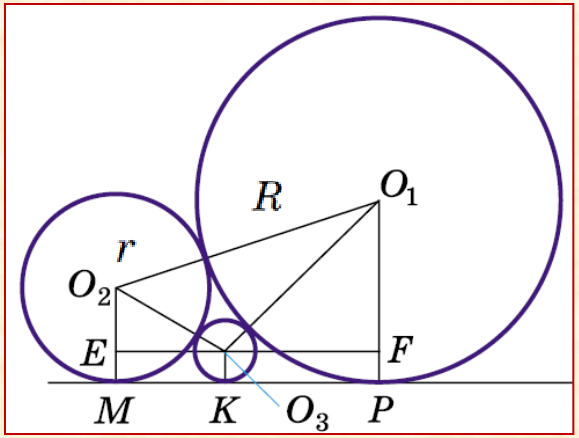
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Ответ: б) 3,2.

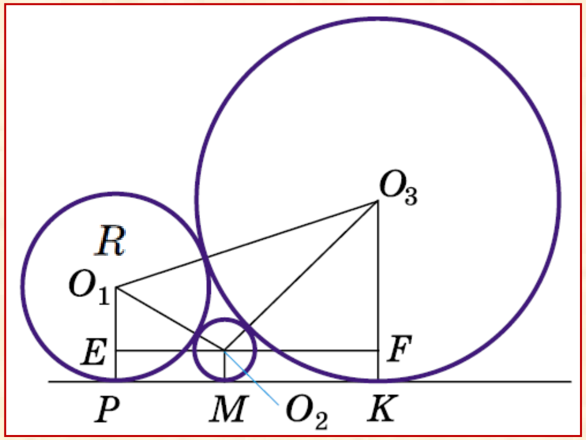
Примеры задач (многовариантные задачи)

18 Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются. Найдите радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

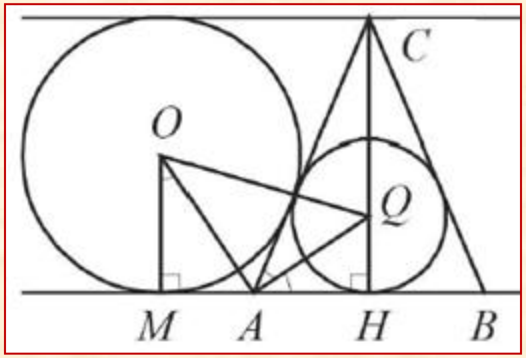


$$\frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}.$$

$$\frac{4Rr(R+r)}{(R-r)^2}$$

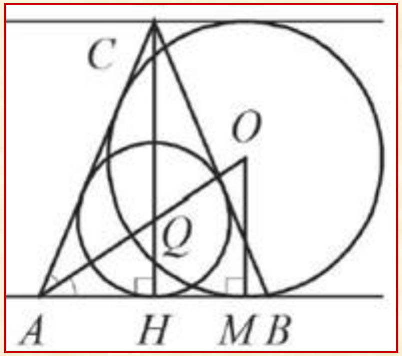


19 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.



Тренировочная работа 2013

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$; $\frac{4\sqrt{13}}{3}$.



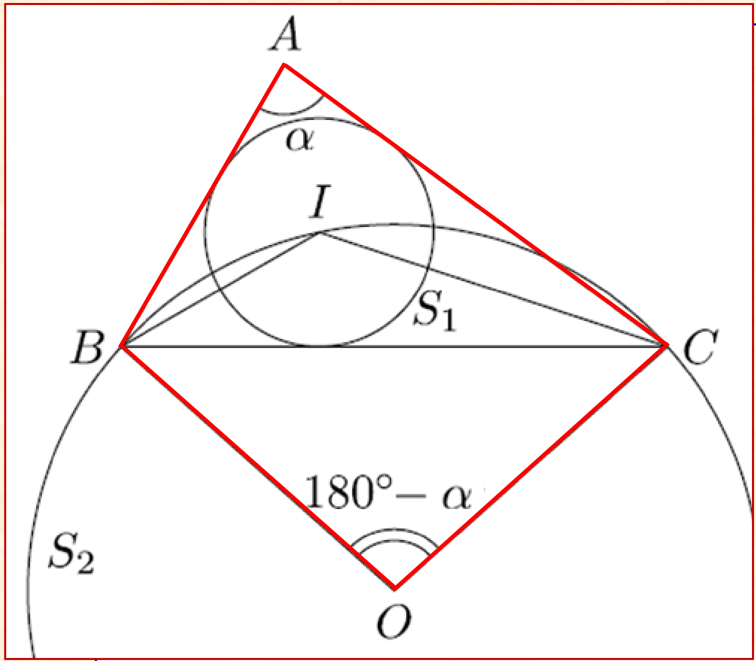
Пример решения задачи (углы, связанные с окружностью)

20

Точка I – центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O – центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как 3 : 4.



б) Пусть r – радиус описанной окружности треугольника ABC, а R – окружности S_2.

$$r=\frac{BC}{2\sin\alpha},\qquad R=\frac{BC}{2\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\frac{3}{4}=\frac{r}{R}=\frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

Ответ: б) $\frac{1}{9}$.

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Свойства вневписанных окружностей треугольника. // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2014. – № 8. − С. 20-30; – № 9. − С. 14-25.

3. МНОГОУГОЛЬНИКИ. Многоугольники и связанные с ними окружности

Примеры заданий 16 (вписанный четырехугольник)

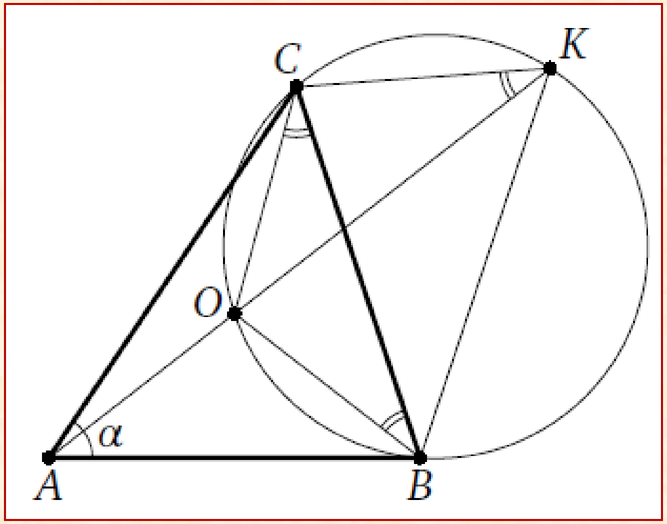
21

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K. Известно, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если известно также, что $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$ и $BC = 48$.

Ответ: 25.



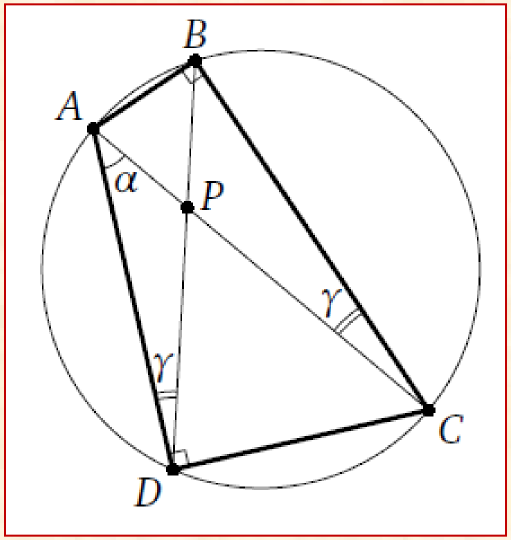
22

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 7$, $BC = 24$, $CD = 15$, $AD = 20$ и $AC = 25$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

б) Найдите косинус угла между его диагоналями.

Ответ: $\frac{3}{5}$.



23

На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Ответ: $\frac{13}{2}$.

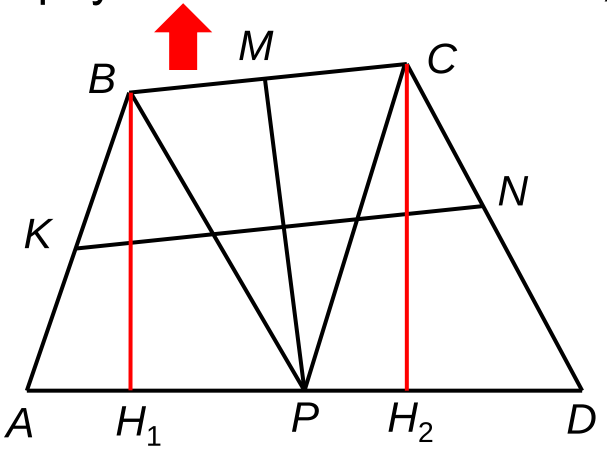
Пример задания 16 и его решение

Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам, а другой в отношении 11:17.

а) Докажите, что данный четырехугольник трапеция.

б) Найдите отношение оснований этой трапеции.

а) Пусть отрезок *MN* делит площадь четырехугольника *ABCD* пополам, т. е. $S_{ABMP} = S_{PMCD}$. Так как $S_{BMP} = S_{PMC}$, то $S_{ABP} = S_{PCD}$. Поскольку $AP = PD$, то высоты треугольников *ABP* и *PCD*, опущенные из вершин *B* и *C* равны, т. е. $BH_1 = CH_2$.

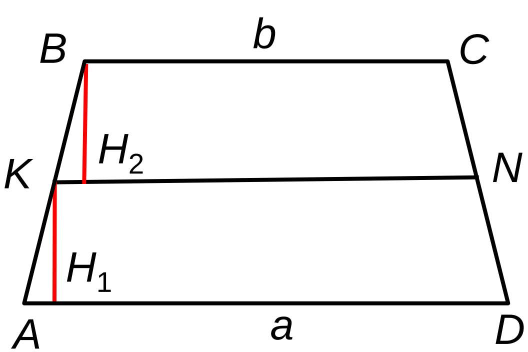


Следовательно, *BC* || *AD*. Соответственно стороны *AB* и *CD* не параллельны, т. е. *ABCD* – трапеция.

Признак трапеции:
Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам, а другой нет.

б) Из пункта *а* задачи следует, *что KN* – средняя линия трапеции *ABCD*. По условию

$$S_{KBCN} : S_{AKND} = 11 : 17.$$



$$\left(\frac{BC+KN}{2}\cdot BH_2\right):\left(\frac{KN+AD}{2}\cdot KH_1\right)=\frac{11}{17}.$$

$$BH_2 = KH_1, \quad \frac{3b+a}{3a+b}=\frac{11}{17}, \quad \frac{a}{b}=\frac{5}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{5}{2}$.

Пример задания 16 и его решение

25

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 4$?

ЕГЭ 2015

а) Пусть сторона квадрата равна a. Тогда $AM_1 = AN_1 = 0{,}5a$, $NN_1 = NT$, $MT = MM_1$, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. Следовательно, $AM_1 + AN_1 = P_{AMN} = a$.

б) По условию $AM = 0{,}2a$. Тогда $MM_1 = 0{,}3a$. Пусть $NN_1 = x$. Тогда $AN = 0{,}5a - x$. Тогда $AN^2 + AM^2 = NM^2$,

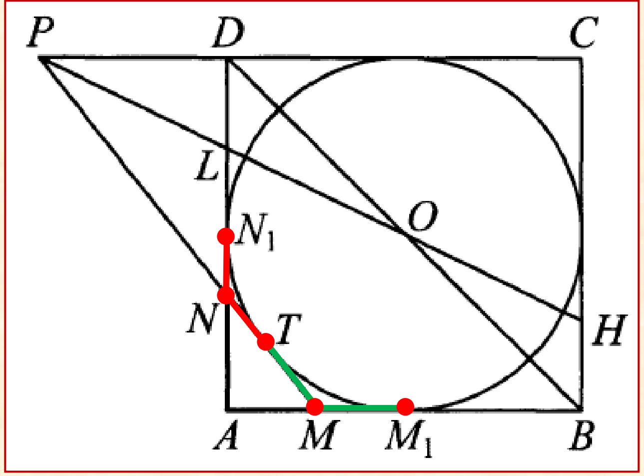
$$(0{,}5a - x)^2 + (0{,}2a)^2 = (0{,}3a + x)^2.$$

Отсюда, $NN_1 = a/8$. Тогда $AN = 3a/8$, $ND = 5a/8$.

Треугольники NPD и AMN подобны. Получаем $PD : AM = ND : AN$ и $PD = a/3$.

Из теоремы Менелая для треугольника DCH и прямой PH имеем $(CH : HB)(PO : OD)(PD : PC) = 1$.

Отсюда $CH : HB = 4 : 1$ или $HB : CH = 1 : 4$.



Ответ: б) $1 : 4$.

Пример задания 16 и его решение

26

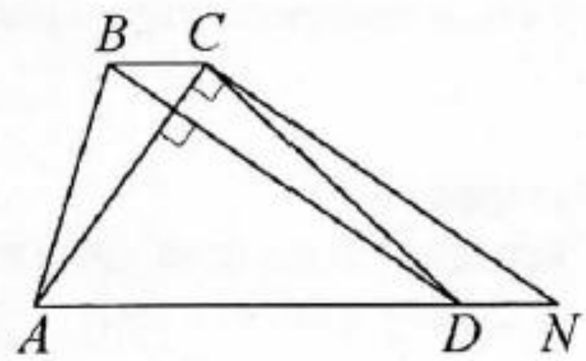
Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

ЕГЭ 2017

Процент решаемости 8,6%

Решение.

а) Пусть в трапеции $ABCD$ сумма оснований BC и AD равна 10, $AC=6$, $BD=8$. Отметим на продолжении основания AD точку N так, что $DN=BC$. Тогда четырёхугольник $BCND$ — параллелограмм, поскольку его стороны BC и DN равны и параллельны. В треугольнике ACN найдём стороны:



$$AC=6,\ CN=BD=8,\ AN=AD+DN=AD+BC=10.$$

Значит, $AC^2+CN^2=AN^2$, откуда $\angle ACN=90°$. Поскольку прямые BD и CN параллельны, диагонали трапеции AC и BD перпендикулярны.

б) Высота трапеции $ABCD$ равна высоте прямоугольного треугольника ACN, проведённой к гипотенузе:

$$\frac{AC\cdot CN}{AN}=\frac{24}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{24}{5}$.

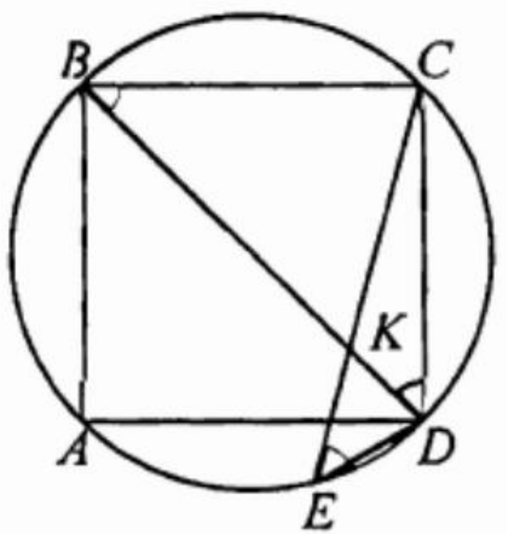
Пример задания 16 и его решение

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE, если угол ECD равен 15^o.

ЕГЭ 2016



а) В треугольниках CKD и CDE угол KCD — общий,

$$\angle CED = \angle CBD = \angle BDC = 45°.$$

Значит, эти треугольники подобны, откуда

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CE};\ CK \cdot CE = CD^2;$$

$$CK \cdot CE = AB \cdot CD.$$

б) В треугольнике CKD имеем: $\angle KCD = 15°$, $\angle CDK = 45°$, откуда $\angle CKD = 120°$.

Из подобия треугольников CKD и CDE получаем: $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CK}{CD}$.

В треугольнике CKD имеем: $\dfrac{CK}{CD} = \dfrac{\sin 45°}{\sin 120°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$,

то есть $CK : CE = \dfrac{CK}{CD} : \dfrac{CE}{CD} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} : \sqrt{\dfrac{3}{2}} = 2:3$, откуда $CK : KE = 2:1$.

Ответ: б) $2:1$.

Пример задания 16 и его решение

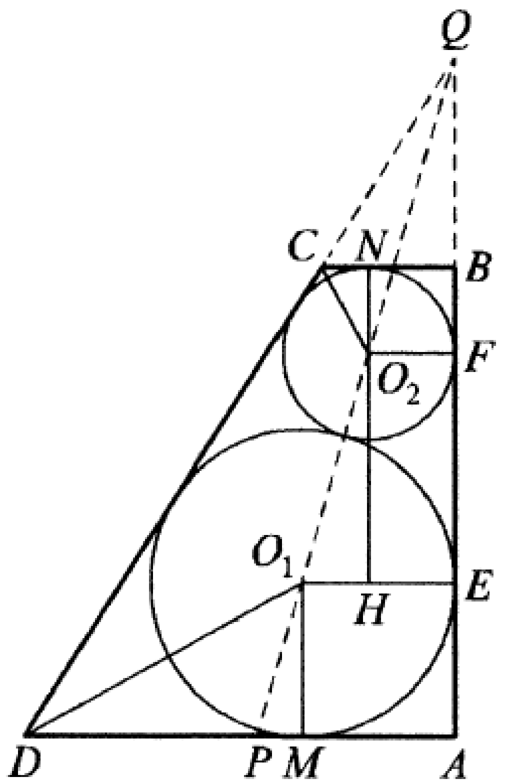
28

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 2 и 1.

ЕГЭ 2015



а) По свойству биссектрисы треугольника AQD

$$\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D.$$

б) $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad BC = BN + NC = 1 + \frac{9-4\sqrt{2}}{7} = \frac{16-4\sqrt{2}}{7}.$$

$$AD = AM + MD = 2 + \frac{18+8\sqrt{2}}{7} = \frac{32+8\sqrt{2}}{7}.$$

$$AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot AB = \frac{24+2\sqrt{2}}{7}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right) = \frac{80+54\sqrt{2}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{80+54\sqrt{2}}{7}$.

Пример задания 16 и его решение

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120^\circ$.

ЕГЭ 2016

а) Поскольку $\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90^\circ$, около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

Значит, $\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED$, то есть прямые BH и ED параллельны.

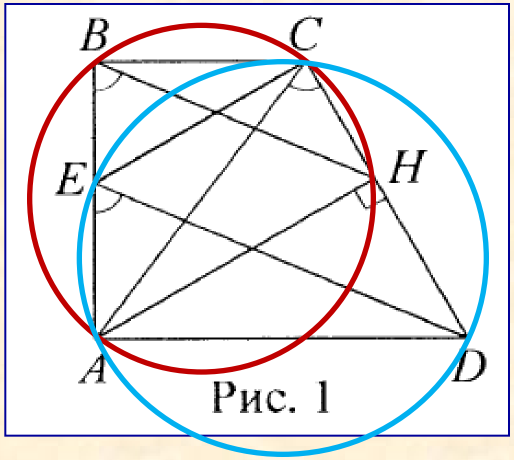


Рис. 1

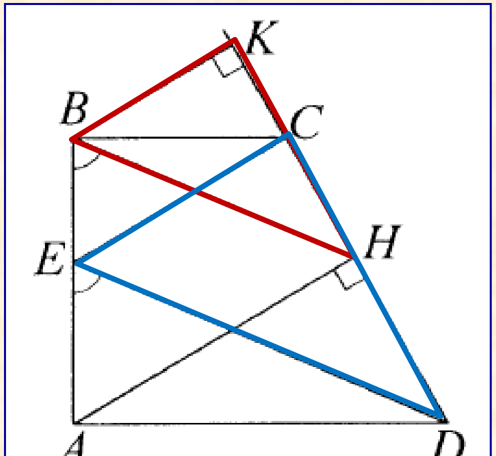


Рис. 2

$$BK = BC \cdot \sin\angle BCK = EC \cdot \cos\angle ECB \cdot \sin\angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} EC,$$

$BH : ED = 3:4.$

Процент решаемости 0,67%

Общий факт для трапеций

30

На стороне *AB* трапеции *ABCD* взяли точку *E*, а на стороне *CD* точку *F* так, что прямые *CE* и *AF* параллельны. Докажите, что $BF \parallel ED$.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, $CF : FD = x : y$.

Треугольники *CFN* и *AFD* подобны, $CF : FD = CN : AD$. Тогда $CN = ax / y$.

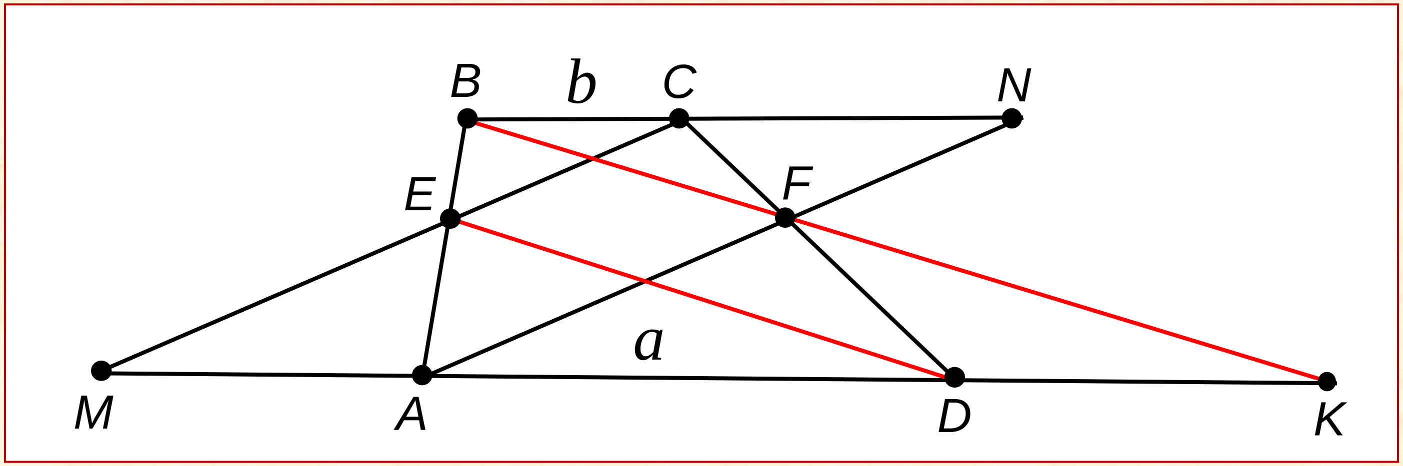
Треугольники *BCF* и *FDK* подобны, $CF : FD = BC : DK$. Тогда $DK = by / x$.

Четырехугольник *MCNA* – параллелограмм, $MA = CN = ax / y$.

Треугольники *MEA* и *EBC* подобны, $AE : EB = MA : BC = (ax / y) : b = (ax) / (by)$.

Также $AD : DK = a : (by / x) = (ax) / (by)$.

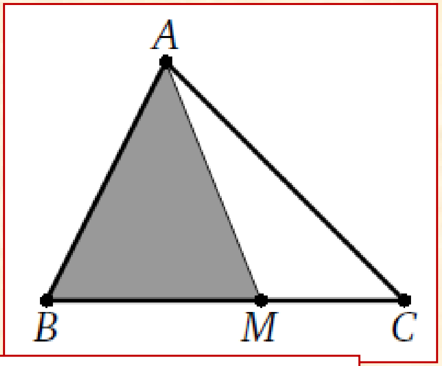
Так как $AE : EB = AD : DK = (ax) / (by)$, то по теореме обратной теореме Фалеса следует, что $BK \parallel ED$, т.е. $BF \parallel ED$.



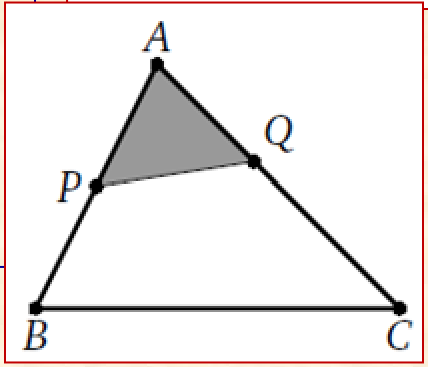
ПЛОЩАДИ

Отношение площадей треугольников

- если точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, то площади треугольников AMB и AMC пропорциональны отрезкам BM и CM, т. е. $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{BM}{CM}$;



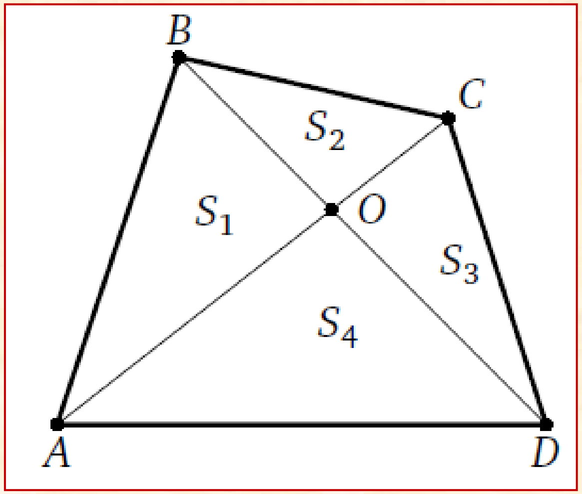
- если прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC (или их продолжения) в точках P и Q соответственно, то $\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$.



31

Диагонали разбивают выпуклый четырёхугольник на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (S_1 и S_3 – площади треугольников, прилежащих к противоположным сторонам четырёхугольника). Докажите, что

$$S_1 S_3 = S_2 S_4.$$



$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$ и $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$, поэтому $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$.

Следовательно, $S_1 S_3 = S_2 S_4$.

Опорная задача

32

На сторонах *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *M*, *N* и *K* так, что *AM* : *MB* = 2 : 3, *AK* : *KC* = 2 : 1, *BN* : *NC* = 1 : 2. В каком отношении прямая *MK* делит отрезок *AN*?

Обозначим $\frac{AP}{AN} = x$ и $S_{\Delta ABC} = S$. Тогда

$$S_{\Delta ABN} = \frac{BN}{BC} \cdot S = \frac{1}{3}S, \quad S_{\Delta ACN} = \frac{CN}{BC} \cdot S = \frac{2}{3}S,$$

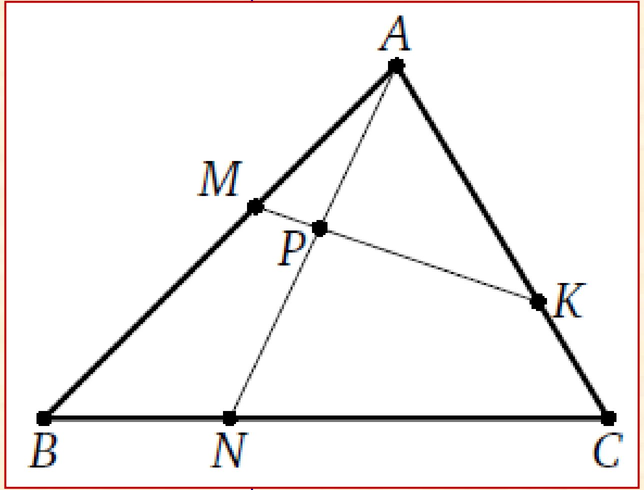
$$S_{\Delta AMP} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AN} \cdot S_{\Delta ABN} = \frac{2}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot S = \frac{2}{15}xS,$$

$$S_{\Delta AKP} = \frac{AK}{AC} \cdot \frac{AP}{AN} \cdot S_{\Delta ACN} = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{4}{9}xS,$$

$$S_{\Delta AMK} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{4}{15}S.$$

Поскольку $S_{\Delta AMK} = S_{\Delta AMP} + S_{\Delta AKP}$, то $\frac{2}{15}xS + \frac{4}{9}xS = \frac{4}{15}S.$

Отсюда находим, что $x = \frac{6}{13}$. Следовательно, $\frac{AP}{PN} = \frac{6}{7}$.



Ответ: 6 : 7, считая от точки *A*.

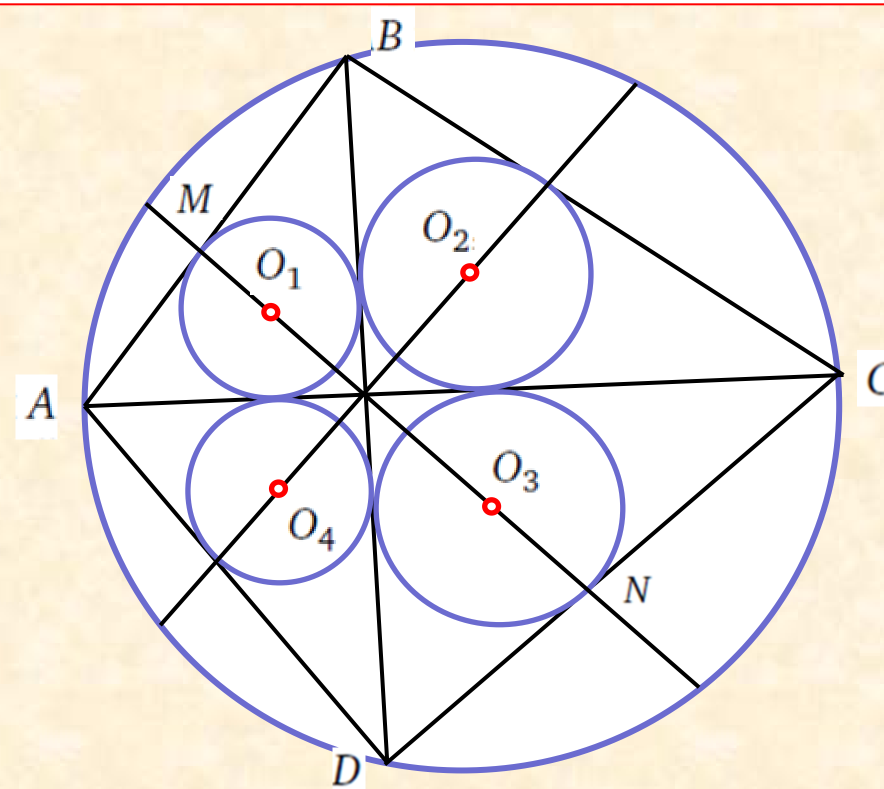
33

Отношение площадей треугольников

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. В треугольники APB, BPC, CPD и APD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно.

а) Докажите, что прямые O_1O_3 и O_2O_4 перпендикулярны.

б) Пусть прямая O_1O_3 пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите отношение площадей треугольников CPN и DPN, если около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и $AM : MB = 1 : 2$.



Ответ: б) $2:1$.

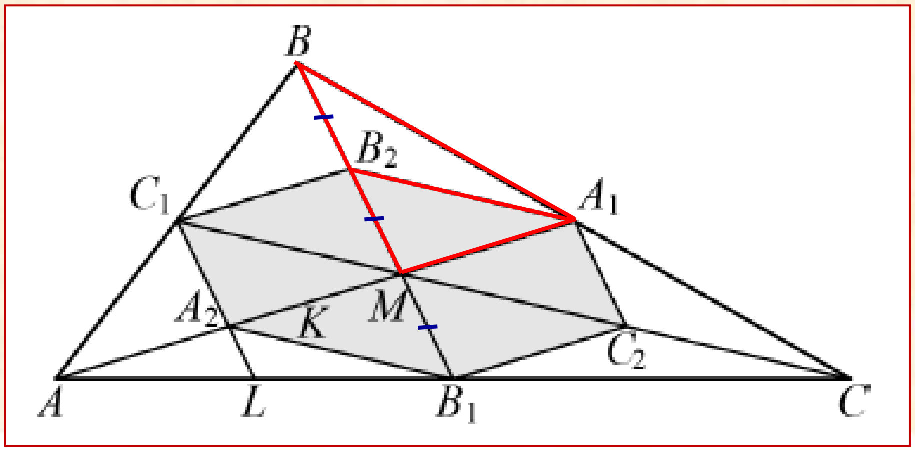
34

Пример задания 16 и его решение

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=5$, $BC=8$ и $AC=10$.



а) $S_{A_1MB}=2S_{A_1MB_2}$.

б) $AA_1^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$.

Сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot\left(B_1C_2^2+A_1C_2^2+A_1B_2^2\right)=\frac{2}{9}\left(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Ответ: б) $\frac{63}{2}$.

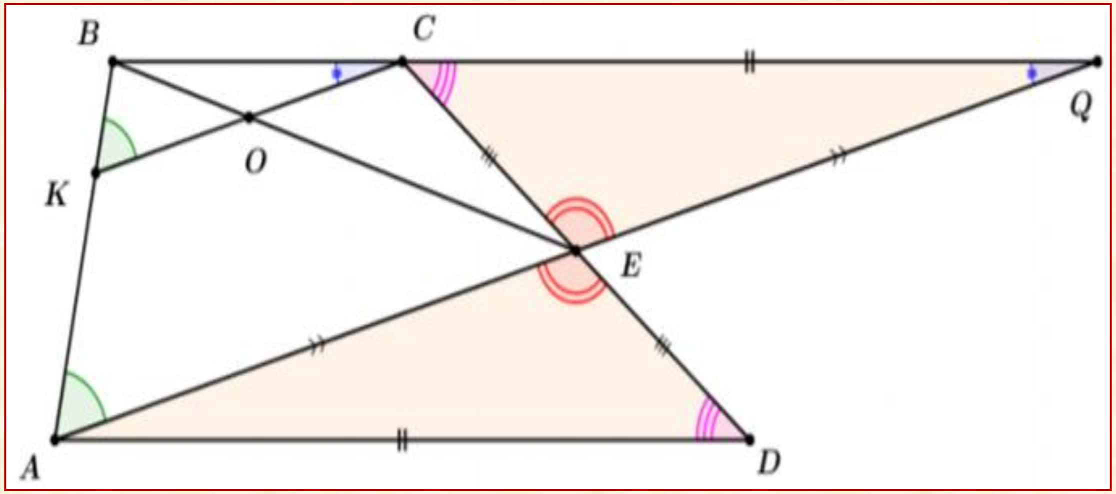
Тренировочная работа 2013

Пример задания 16 и его решение

ЕГЭ 2017. Точка *E* – середина боковой стороны *CD* трапеции *ABCD*. На стороне *AB* взяли точку *K* так, что прямые *CK* и *AE* параллельны. Отрезки *CK* и *BE* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что *CO* = *KO*.

б) Найдите отношение оснований трапеции *BC* и *AD*, если площадь треугольника *BCK* составляет 9/100 площади трапеции *ABCD*.



б) $S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{AED}$.

Поскольку $\Delta AED = \Delta CEQ$,

то $S_{AED} = S_{CEQ}$, тогда и

$S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{CEQ} = S_{ABQ}$.

$\Delta KBC \sim \Delta ABQ \quad \frac{BC}{BQ} = \sqrt{\frac{S_{BCK}}{S_{ABQ}}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$.

$BQ = BC + CQ = BC + AD$. В итоге получаем

$$\frac{BC}{BC + AD} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3BC + 3AD = 10BC \Leftrightarrow 7BC = 3AD \Leftrightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: *BC* : *AD* = 3 : 7.

Подготовительные задания 16

1 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2 Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

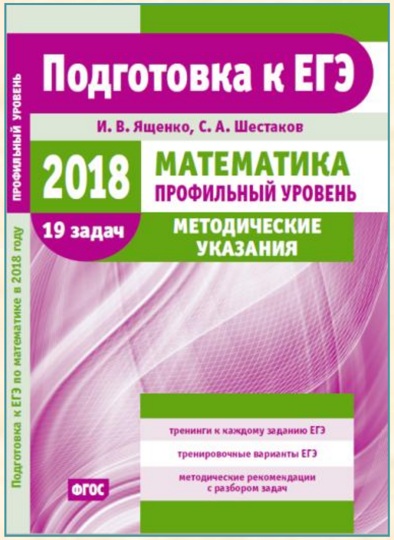
а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.



Подготовительные задания 16

5 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.
а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.
б) Найдите CL, если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

6 В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.
а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.
б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM : BQ$, если известно, что $AB : AC = 1 : 3$.

7 На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.
а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.
б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

Подготовительные задания 16

8 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.
а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.
б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

9 Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.
а) Докажите, что M — середина AB.
б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10 Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.
а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.
б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC, причём $DB : DC = 1 : 3$.

Ответы к подготовительным заданиям 16

Задача 16. Подготовительные задания

1. 60°, 60°, 120°, 120°. **2.** 48. **3.** 50. **4.** 20. **5.** $3\sqrt{5}$. **6.** 1 : 1. **7.** 9 : 16.
8. 90°. **9.** $3\sqrt{13}$. **10.** 90°.

Зачетные задания 16

1 Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

2 В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

3 Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

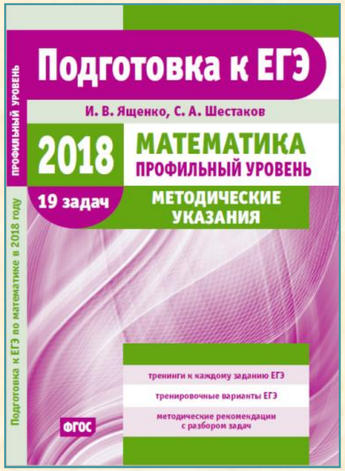
а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

4 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.



Зачетные задания 16

5 Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.
а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.
б) Найдите MN, если известно, что $AB=14$, $BC=10$, $AC=6$.

6 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.
а) Докажите, что $CM \perp DK$.
б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

7 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=3$, $AC=\sqrt{73}$ и медианой $AM=4$.
а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.
б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

Зачетные задания 16

8 Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM:MB=2:1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD=\sqrt{6}$.

9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC=120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE=\angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE=40$ и $CE=24$.

10 Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN=OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Ответы к зачетным заданиям 16

Зачётные задания

1. 30. **2.** 5. **3.** 216. **4.** 60°. **5.** 3,5. **6.** 49. **7.** 2,4. **8.** $2\sqrt{5}$. **9.** 113. **10.** $2\sqrt{41}$.

Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru