

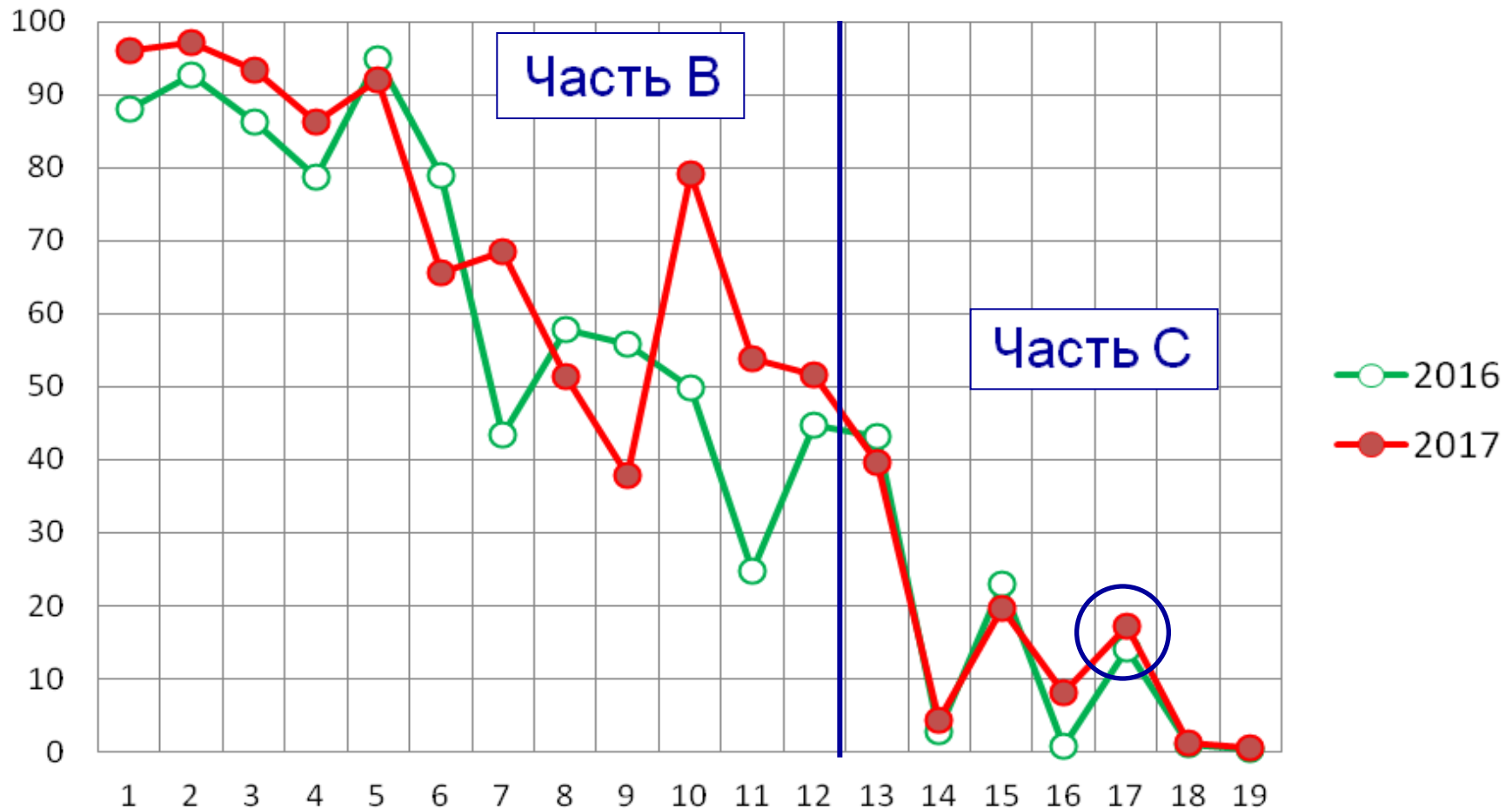
**Рекомендации по подготовке к выполнению
задания №17
(финансово-экономические задачи)
ЕГЭ профильного уровня**



**Прокофьев Александр Александрович,
Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»**

Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.

Сравнение процентов решаемости заданий экзамена по математике профильного уровня 2016 и 2017 гг.



Критерии проверки задания №17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задание 17 на ЕГЭ по математике профильного уровня 2017 года

Задание 17 в основную волну ЕГЭ (профильный уровень) 2017 года представляло задачу на кредиты.

Процент решаемости оказался в пределах статистики для решения подобных заданий (1 балл получило 5,35% от общего числа участников экзамена, 2 балла – 5,35%, 3 балла – 17,16%).

Основные ошибки, допущенные участниками экзамена:

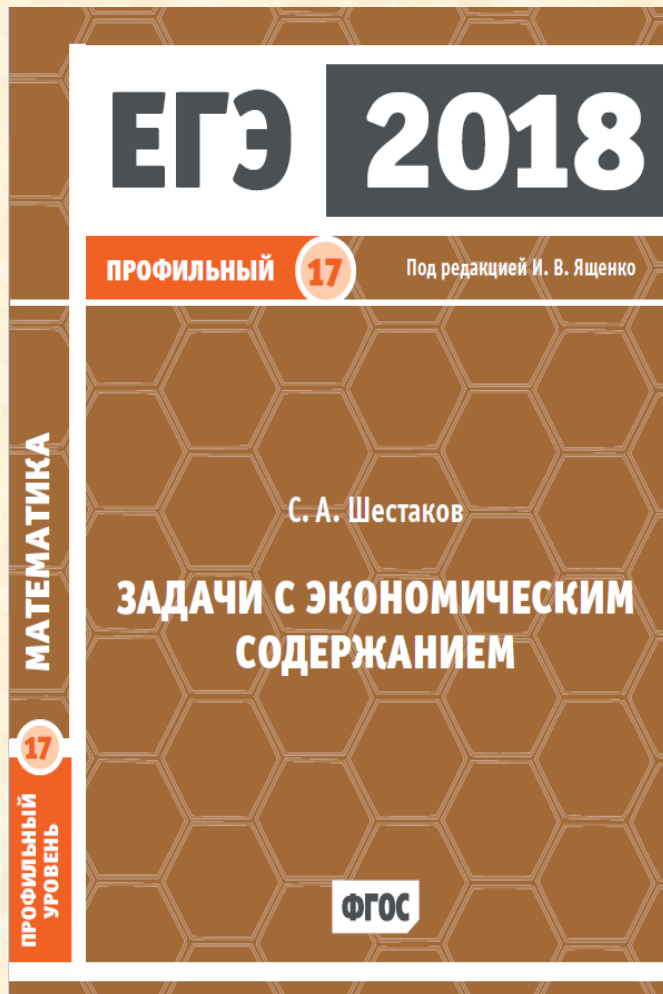
- неверное составление модели;
- вычислительные (арифметические);
- прекращение решения на промежуточном шаге, то есть без доведения ответа до числового значения;
- решение методом перебора без обоснования единственности;
- использование в решении без вывода формул для задач о кредитовании, отсутствующих в учебниках (решение имеет вид «формула – ответ»), что можно трактовать как отсутствие построения модели задачи.

Распределение удовлетворенных апелляций по заданиям с развернутым ответом



Задание №17 (имеет наибольшее число выходов на апелляцию!).

Создано разработчиками ЕГЭ



Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел 14 – 20 – 36 – 50?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. по заданию 17 издательства Легион

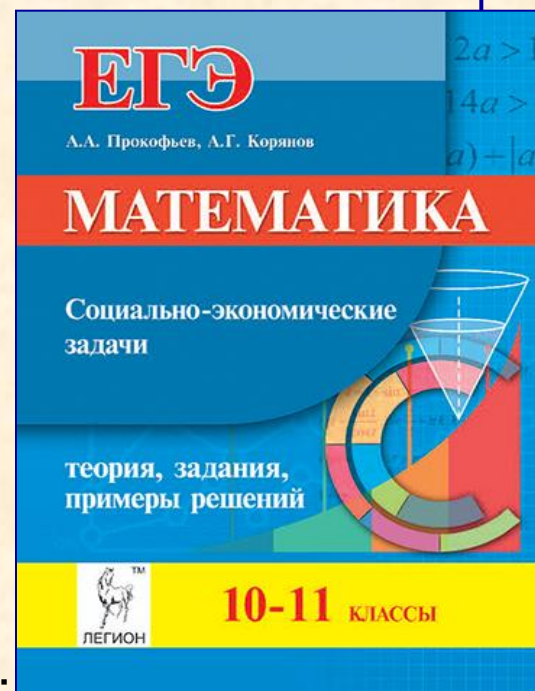
Оглавление

§ 1. Экономико-математические модели 5

- (1) Простейшие задачи на проценты;
- (2) пропорциональное деление величины;
- (3) процентное изменение величины;
- (4) проценты и соотношения между величинами;
- (5) формула простых процентов;
- (6) формула сложных процентов;
- (7) обобщённая формула сложных процентов;
- (8) задачи с целочисленными переменными;
- (9) задачи на оптимизацию; (10) средние величины;
- (11) числовые характеристики дискретной случайной величины.

§ 2. Сюжетные задачи 64

- (1) Задачи о вкладах; (2) задачи о кредитах;
- (3) торгово-денежные отношения; (4) курсы валют;
- (5) инфляционные процессы;
- (6) выборы и социологические опросы.



Что можно ожидать в качестве задания 17 на экзамене?

Тип задания по кодификатору требований

Задание на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчётов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчётах.

Характеристика задания

Текстовая задача на использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, обычно с экономическим содержанием.

Комментарий

Относительно сложная текстовая задача, связанная с банковскими кредитами, оптимизацией производства или затрат на него.



О сколько нам открытий чудных
Готовят ...



Различные типы задания №17 в вариантах ЕГЭ по математике (профильный уровень) в 2017 году

Задачи на кредиты и оптимизацию производства товаров или услуг

Задание №17. Задачи на кредиты

Многие участники экзамена действовали по аналогии с решениями подобных задач, представленными на различных сайтах или в пособиях для подготовки к ЕГЭ.

Можно выделить две ситуации.

1. Решение основано на применении окончательной формулы без ее вывода. В этом случае можно утверждать об отсутствии построения модели задачи. К тому же использование без вывода формул, которых нет в официальных учебниках в соответствии со «**Спецификацией контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году единого государственного экзамена**» раздел 3, пункт 2, считается недопустимым.
2. Решение основано на применении метода перебора без достаточных обоснований единственности решения задачи. В этом случае отсутствует построение модели задачи.

Задание №17. Задачи на кредиты (схема 1 – платеж равными взносами)

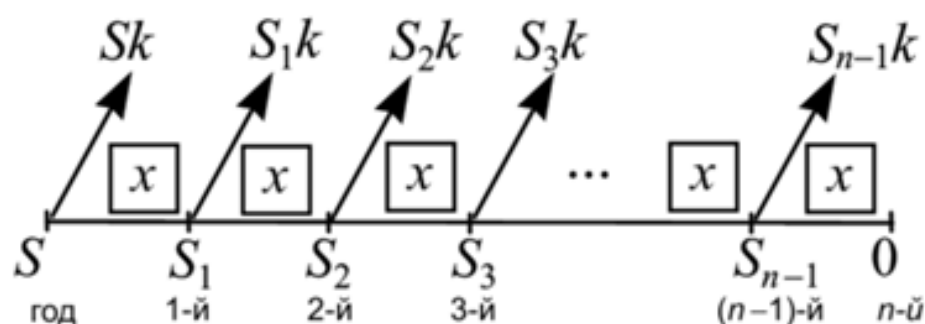
Схема 1. Пусть в банке планируется взять кредит в банке на некоторую сумму S . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на r % по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найти общую сумму платежей, внесенных клиентом, после погашения кредита, если **все ежегодные платежи равны между собой**.

Решение.

Пусть x – вносимый ежегодный платеж, S_m – долг клиента банку на конец m -го года. Тогда $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ – его долг банку в начале $(m+1)$ -го года или $S_m \cdot k$, где $k = 1 + \frac{r}{100}$.



В соответствии с нарисованной схемой получаем цепочку равенств:

$$S_1 = S \cdot k - x,$$

$$S_2 = S_1 \cdot k - x = (S \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

$$S_3 = S_2 \cdot k - x = (S \cdot k^2 - x \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^3 - x \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

.....

$$S_n = S_{n-1} \cdot k - x = S \cdot k^n - x \cdot k^{n-1} - x \cdot k^{n-2} - \dots - x \cdot k - x =$$

$$= S \cdot k^n - x(\underbrace{k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k + 1}_{\text{сумма геометрической прогрессии}}) = 0.$$

сумма геометрической прогрессии

Получаем уравнение $S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0$. Отсюда $x = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}$

и общая сумма выплат равна $nx = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}$.



Задание №17. Задачи на кредиты

(схема 2 – уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

Схема 2. Пусть в банке планируется взять кредит в банке на некоторую сумму S . Условия его возврата таковы:

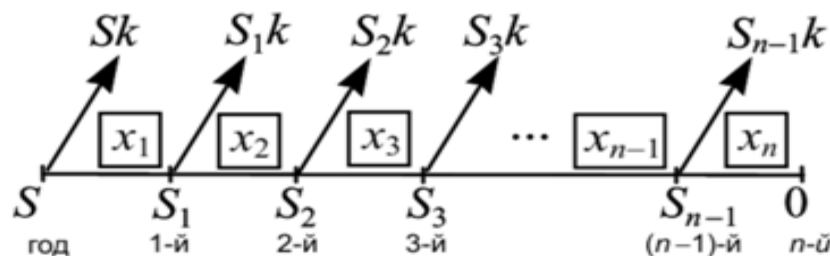
- в начале года долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- после внесения платежа каждый год **долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года.**

Найти общую сумму внесенных платежей после погашения кредита.

Решение.

Пусть x_m и S_m – соответственно вносимый платеж и долг клиента банку на конец m -го года. Тогда $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ – его долг банку в начале $(m+1)$ -го года или $S_m \cdot k$, где $k = 1 + \frac{r}{100}$. В соответствии с условием задачи долг ежегодно уменьшается на величину равную $\frac{S}{n}$, тогда $S_m = S - S \cdot \frac{m}{n}$.

В соответствии с условием задачи и схемой получаем цепочку равенств:



$S_1 = S - \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-1}{n},$	$x_1 = S \cdot k - S_1 = S \cdot k - S \cdot \frac{n-1}{n},$
$S_2 = S - 2 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-2}{n},$	$x_2 = S_1 \cdot k - S_2 = S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-2}{n},$
$S_3 = S - 3 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-3}{n},$	$x_3 = S_2 \cdot k - S_3 = S \cdot \frac{n-2}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-3}{n},$
.....	
$S_m = S - (n-1) \cdot \frac{S}{n} = \frac{S}{n},$	$x_n = S_{n-1} \cdot k = \frac{S}{n} \cdot k.$



Суммируя все выплаты, получаем $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n =$

$$= S \cdot k - \underbrace{S \cdot \frac{n-1}{n}} + \underbrace{S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-2}{n}} + \dots + \frac{S}{n} \cdot k =$$

$$= S \cdot k + S \cdot (k-1) \underbrace{\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_{\text{сумма арифметической прогрессии}}.$$

Получаем формулу $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \cdot k + S \cdot (k-1) \cdot \frac{n-1}{2}.$



Задание №17 на кредиты (кредит выплачивается равными платежами)

17

Пример 1. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом прошлого года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 156060 рублей?

Решение.

Пусть S руб. – сумма кредита, x руб. – размер ежегодного платежа. Тогда общая сумма выплат после полного погашения кредита через $n = 3$ года равна $3x = S + 156060$ руб. Так как $r = 30$, то $k = 1 + \frac{r}{100} = 1,3$. Выводим

3 года – 3 строчки для вывода
формулу $3x = 3 \cdot S \cdot \frac{k^3(k-1)}{k^3-1}$. Из уравнения $S + 156060 = 3 \cdot S \cdot \frac{1,3^3 \cdot 0,3}{1,3^3 - 1}$

получаем $S \cdot \frac{7803}{11970} = 156060$. Отсюда $S = 239400$ руб.

Ответ. 239400 руб.

Задание №17 на кредиты (уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

17

Пример 2. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей.

Решение.

Пусть n – количество лет, на которое берется кредит $S = 5$ млн. руб., $x_1, x_2, \dots, x_n$ – величины в рублях платежей в первый, второй, ..., n -й годы. Общая сумма выплат после полного погашения кредита равна $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 7,5$ млн. руб. Так как $r = 20$, то $k = 1,2$. Выводим формулу

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \cdot k + S \cdot (k - 1) \cdot \frac{n-1}{2}. \text{ Из уравнения } 7,5 = 5 \cdot 1,2 + 5 \cdot 0,2 \cdot \frac{n-1}{2}$$

получаем $n = 4$.

Ответ. 4.

Задание №17 на кредиты (долг в соответствии с данной таблицей)

17

ЕГЭ 2016

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Процент решаемости **14%**

Решение

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} & k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ & = (k - 1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k - 1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей, значит,

$$4,5(k - 1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4\frac{4}{9}.$$

Ответ. 5.

**ЕГЭ
2015**

Пример 64 (ЕГЭ, 2015). В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

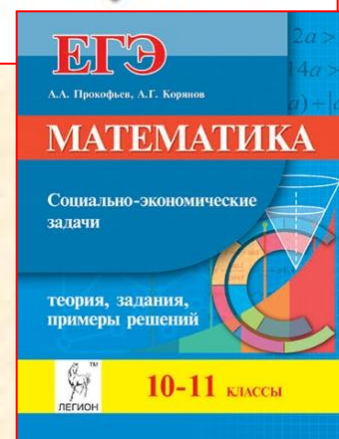
На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Решение. Пусть сумма кредита равна $An = 20$, где n — искомое количество лет. Составим таблицу кредитной истории

Годы	Долг в июле (млн руб.) — без учёта процентной ставки	Долг в январе (млн руб.) — без учёта погашения части кредита	Выплачено с февраля по июнь (млн руб.)	Долг в июле (млн руб.) с учётом погашения части кредита
1	An	$1,3An$	$1,3An - A(n-1)$	$A(n-1)$
2	$A(n-1)$	$1,3A(n-1)$	$1,3A(n-1) - A(n-2)$	$A(n-2)$
3	$A(n-2)$	$1,3A(n-2)$	$1,3A(n-2) - A(n-3)$	$A(n-3)$
...	...	...	...	...
9	A	$1,3A$	$1,3A$	0

$$1,3A \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n - A \cdot \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = 47;$$

Ответ: 8 лет.



Задание №17 (задача на оптимизацию)

Целевые функции

В задачах оптимизации обычно заданы определённые условия производства какой-либо продукции или услуги и требуется найти значения некоторых величин с целью максимизации прибыли или минимизации расходов.

Математическая модель (т.е. формализация условия задачи посредством неравенств и уравнений, задающих связи между данными величинами) любой из таких задач обычно приводит к одному-двум линейным уравнениям (неравенствам) относительно двух данных неизвестных и к одному линейному или простейшему нелинейному уравнению, которое связывает данные неизвестные и величину, максимум или минимум которой надо определить.

После введения в качестве новой неизвестной (параметра) этой величины (её обычно называют **целевой функцией**) задача сводится к определению наибольшего (наименьшего) значения параметра, при котором полученное уравнение имеет хотя бы один корень на множестве неотрицательных чисел, удовлетворяющий данным ограничениям.

Задание №17 (задача на оптимизацию)

17

Пример 3. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе – 300 рублей.

Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Задание №17 (задача на оптимизацию)

Решение. 1-й способ (введение параметра).

Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе во втором городе y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $x + y$ единиц товара при затратах на оплату труда $500x^2 + 300y^2$ рублей.

Требуется найти наибольшее значение параметра a , где $a = x + y$, при выполнении условий $500x^2 + 300y^2 = 1200000$ (*), $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Выразив $y = a - x$, и, подставив в (*) $5x^2 + 3(a - x)^2 = 12000$, получим квадратное уравнение

$$8x^2 - 6ax + 3a^2 - 12000 = 0.$$

Задача сводится к нахождению наибольшего неотрицательного значения параметра, при котором это уравнение имеет решение $x \geq 0$ и, кроме того, получается $y \geq 0$. Квадратное уравнение имеет решение, если

$$D = 36a^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3a^2 - 12000) = -64a^2 + 32 \cdot 12000 \geq 0 \Leftrightarrow -80 \leq a \leq 80.$$

При $a = 80$ получаем $x = 30$ и $y = 50$. Значит, наибольшее количество единиц товара равно 80.

Ответ. 80.

Задание №17 (задача на оптимизацию)

Решение. 2-й способ (с использованием производной).

Допустим, что на заводе в первом городе рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе во втором городе y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $x + y$ единиц товара при затратах на оплату труда $500x^2 + 300y^2$ рублей.

Найдем наибольшее значение выражения $Q = x + y$ при условии $500x^2 + 300y^2 = 1200000$. Выразив отсюда $y = \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}$, получим

$$Q(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}.$$

Нужно найти наибольшее значение функции $Q(x)$ на отрезке $[0; 20\sqrt{6}]$.

$$Q'(x) = 1 - \frac{5x}{3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}} \text{ при } x \neq 20\sqrt{6}.$$

Задание №17 (задача на оптимизацию)

Продолжение решения

Из уравнения $Q'(x) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2} &= 5x, \\ x^2 &= 900, \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Точки $x = 30$ – единственная критическая точка функции на отрезке $[0; 20\sqrt{6}]$. Сравнивая значения $Q(30) = 80$, $Q(20\sqrt{6}) = 20\sqrt{6}$, $Q(0) = 20\sqrt{10}$, получаем, что наибольшее значение функции $Q(x)$ равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80.

Ответ. 80.

Задание 17 на ЕГЭ 2015 года

Пример 38. Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $20t$, а с сервера №2 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $21t$ Гб обработанной информации; $25 \leq t \leq 55$. Каков наибольший общий объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гб?

Решение. Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гб из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гб информации. Выразим y через x : $y = \sqrt{3364 - x^2}$.

Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$.

$$f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}, \quad f'(x) = 0, 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2}, \quad x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600, x = 40.$$

Поэтому $x = 40$ единственная критическая точка и $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$. Условия $25 \leq x \leq 55$, $25 \leq y \leq 55$ выполнены. Если $x < 40$, то $x^2 < 1600$, $400 > \frac{441x^2}{3364 - x^2}$ и $f'(x) > 0$. Если $x > 40$, то $f'(x) < 0$. Поэтому $x = 40$ есть точка максимума. Значит, $f_{\text{наиб.}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.



Ответ: 1682 Гб.

Задание №17 (задача на оптимизацию)

17

Пример 4. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года.

При каких положительных значениях r это возможно?

Задание №17 (задача на оптимизацию)

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t , то в конце двадцать пятого года на его счете будет $f(t) = t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей.

Комментарий. Большинство участников экзамена решало данную задачу следующим образом. Вводили последовательность $\{f(t)\}$, где $f(t) = t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей сумма на счете пенсионного фонда в конце двадцать пятого года при условии, что он продаст ценные бумаги в конце года t . Далее решали систему
$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22). \end{cases}$$

Однако данное условие является необходимым, но не достаточным условием того, что последовательность принимает наибольшее значение при $t = 21$. Такое решение оценивается в 0 баллов.

Ответ. $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.



Задание №17 (задача на оптимизацию)

Решение. 1-й способ (предложенный в критериях).

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t , то в конце двадцать пятого года на его счете будет $S_t = t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей. Сравним числа S_t и S_{t+1} :

$$S_{t+1} - S_t = (t+1)^2(1+r)^{24-t} - t^2(1+r)^{25-t} = (1+r)^{24-t}(-rt^2 + 2t + 1).$$

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = -rx^2 + 2x + 1$. Если $f(t) > 0$, то $S_{t+1} - S_t > 0$, и если $f(t) < 0$, то $S_{t+1} - S_t < 0$.

График функции $f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вниз. Так как $f(0) > 0$, то если для некоторого натурального числа t выполнено условие $f(t) < 0$, то для любого $n > t$ выполнено условие $f(n) < 0$. Следовательно, ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года при выполнении условий $f(20) > 0$ и $f(21) < 0$, то есть

$$\begin{cases} -20^2 r + 2 \cdot 20 + 1 > 0, \\ -21^2 r + 2 \cdot 21 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400r < 41, \\ 441r > 43 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}}.$$

Задание №17 (задача на оптимизацию)

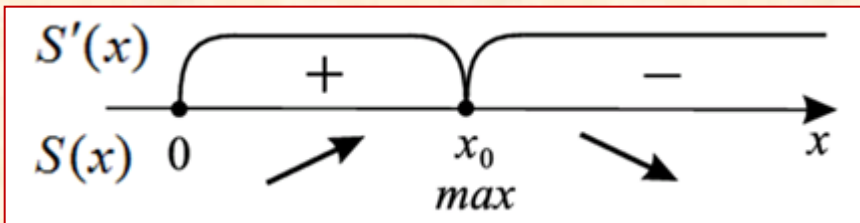
Решение. 2-й способ (с использованием производной).

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t , то в конце двадцать пятого года на его счете будет $S(t) = t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. рублей. Рассмотрим функцию $S(x) = x^2(1+r)^{25-x}$, зависящую от действительной переменной x на отрезке $[0; 25]$. Числа $S(t)$ последовательности $\{S(t)\}$, $1 \leq t \leq 25$ совпадают со значениями функции $S(x)$ при $x = t$.

Функция $S(x)$ непрерывна на $[0; 25]$ и $S(0) = 0$, $S(25) = 625$.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(x^2 (1+r)^{25-x} \right)' = 2x(1+r)^{25-x} - x^2 (1+r)^{25-x} \ln(1+r) = \\ &= x(1+r)^{25-x} (2 - x \ln(1+r)). \end{aligned}$$

Продолжение решения



$S'(x) = 0$ при $x = 0$ или $x_0 = \frac{2}{\ln(1+r)}$. Причем $S'(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq \frac{2}{\ln(1+r)}$ и

$S'(x) < 0$ при $x > \frac{2}{\ln(1+r)}$, то есть $x_{\max} = \frac{2}{\ln(1+r)}$ (единственный!).

В условии сказано, что ценные бумаги выгоднее продать в конце 21-го года. Значит, максимум функции $S(x)$ находится на интервале $(20; 22)$ и для последовательности $\{S(t)\}$ должны выполняться условия $\begin{cases} S(21) > S(20), \\ S(21) > S(22). \end{cases}$

Отсюда

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20}, \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21^2 > 20^2(1+r), \\ 21^2 > 22^2(1+r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r < \frac{41}{400}, \\ r > \frac{43}{441}. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

Графический способ нахождения экстремума линейной целевой функции

Пример 10. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется пять часов работы станка A и три часа работы станка B , а для изготовления изделия второго типа требуется два часа работы станка A и четыре часа работы станка B (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок A может работать не более 150 часов в месяц, а станок B — не более 132 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 300 д.е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 200 д.е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Пусть x — число изделий первого типа, y — второго, a — прибыль предприятия. Тогда

$$a = 300x + 200y,$$

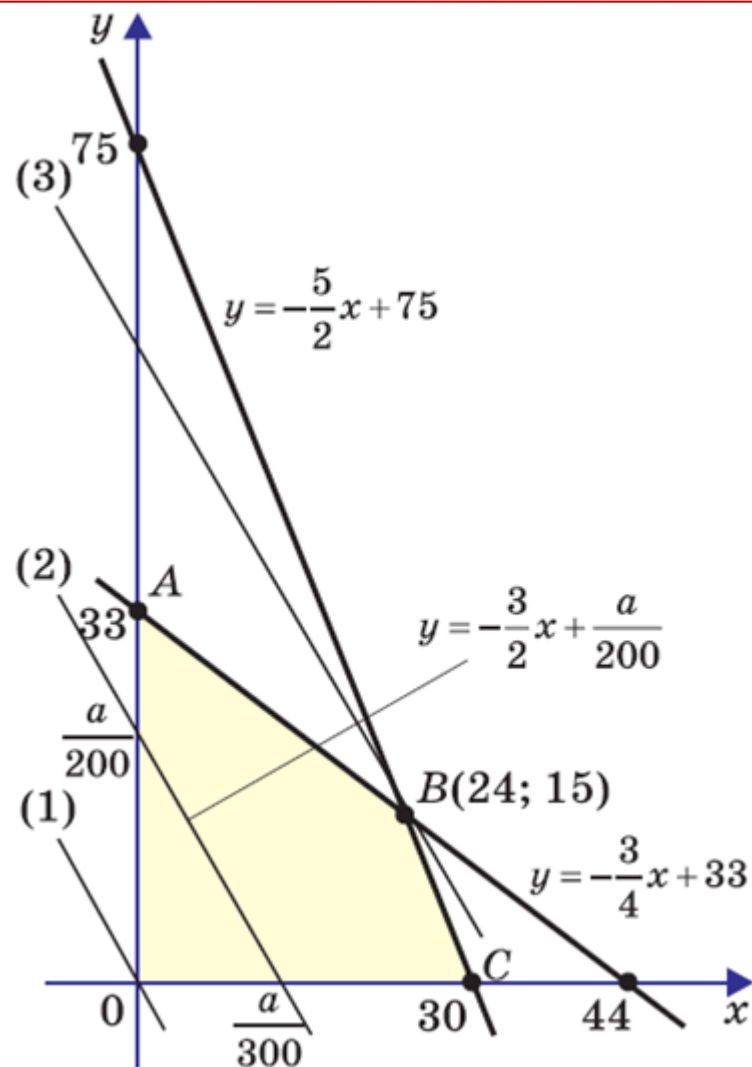
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}, \quad (*)$$

а условия производства даются системой неравенств

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 150, \\ 3x + 4y \leq 132, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

где x и y — целые числа.

На координатной плоскости Oxy система неравенств задает четырехугольник $OABC$ с внутренней областью, ограниченной осями координат и прямыми



$$y = -\frac{5}{2}x + 75, \quad y = -\frac{3}{4}x + 33. \quad (**)$$

Три различных положения прямой (*) обозначены на рисунке цифрами:

- (1) соответствует значению $a = 0$,
- (3) наибольшему возможному значению a ,
- (2) промежуточному значению a .

Наибольшее значение прибыли a достигается, если прямая (*) проходит через точку B – точку пересечения прямых (**)

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + 75, & x = 24 \\ y = -\frac{3}{4}x + 33 & y = 15. \end{cases}$$

$$a = 300x + 200y = 10\,200.$$

Ответ: 24 изделия первого типа; 15 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 10 200 д.е.

Если точка экстремума имеет дробное значение

Замечание. Если бы в аналогичной задаче координаты точки B оказались дробными числами, нужно было бы найти ближайшие к B точки четырёхугольника $OABC$ или его внутренней области (это справедливо и для любого другого многоугольника) с целыми координатами (их называют *опорными*) и выбрать ту из них, для которой прямая $(*)$ (или аналогичная ей) пересекает ось абсцисс (или ось ординат) в точке, наиболее удалённой от начала координат.

Далее необходимо исследовать, будет ли решение, полученное с помощью этой прямой, оптимальным.

Нелинейная целевая функция

Пример 19. Строительство нового завода стоит 75 млн руб. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн руб.) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Из условия следует, что ежегодная прибыль a фирмы (в млн руб.) равна

$$px - (0,5x^2 + x + 7),$$

то есть

$$a = -0,5x^2 + (p - 1)x - 7. \quad (1)$$

График функции (1) – парабола, ветви которой направлены вниз.

Наибольшего значения эта функция достигает в точке

$$x_0 = -\frac{p-1}{2 \cdot (-0,5)} = p-1.$$

Тогда наибольшее значение функции (1) будет равно $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$.

Строительство завода окупится не более чем за 3 года, если

$$3 \cdot \left(\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \right) \geq 75, \quad (p-1)^2 \geq 64, \quad (p-9)(p+7) \geq 0, \quad p \in (-\infty; -7] \cup [9; +\infty).$$

Наименьшим неотрицательным решением неравенства будет $p = 9$.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №9(786)
С. ШЕСТАКОВ № 9 (786)

Тренировочная работа
21.12.2017

Ответ: 9.

Подготовительные задания 17

- 1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 6 409 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?
- 2 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 4 382 000 рублей в кредит под 16 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 16 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?
- 3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Андрей переводит в банк 587 250 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?



- 4 31 декабря 2013 г. Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 50 000 рублей, а во второй — 66 000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?
- 5 У фермера есть два поля, каждое площадью 6 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га и на втором тоже 410 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 430 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором — 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 руб. за центнер, морковь — по цене 3500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

7 Завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость, 1 ц.	Отпускная цена, 1 ц.
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

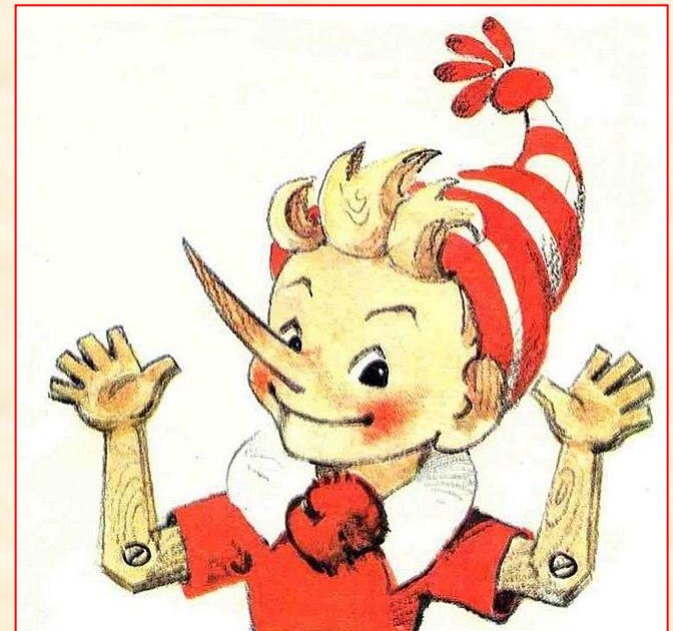
- 8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 2 674 100, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?
- 9 Иннокентий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t станков. За каждый час работы (на каждом из заводов) Иннокентий платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 станков. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

Ответы к подготовительным заданиям 17

Задача 17. Подготовительные задания

1. 3 817 125. 2. 1 951 120. 3. 986 000. 4. 10. 5. 18,81. 6. 576 000.
7. 53 500 руб. 8. 10. 9. 1,8. 10. 10.



Зачетные задания 17

- 1 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 052 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?
- 2 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 18 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 18 %), затем Андрей переводит в банк 4 107 580 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?
- 3 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Андрей переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?



- 4 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 59 000 рублей, а во второй — 56 100 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?
- 5 Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка A и 9 часов работы станка B . Для изготовления изделия второго типа требуется 8 часов работы станка A и 4 часа работы станка B (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок A может работать не более 208 часов в месяц, а станок B — не более 144 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

- 6 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 4 026 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Ваня переводит в банк платёж. Весь долг Ваня выплатил за 4 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?
- 7 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 20 квадратных метров и номера категории А площадью 25 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1115 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 3500 рублей в сутки, а номер категории А — 4200 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

- 8 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 1 148 175 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 2 055 375, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?
- 9 В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придется выплатить рабочим?
- 10 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 800 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 2 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 000 рублей?

Ответы к зачетным заданиям 17

Зачётные задания

1. 3 110 400. 2. 8 931 000. 3. 9 282 000. 4. 10. 5. 6 изделий первого типа; 22 изделия второго типа; максимальная прибыль равна 354 000 д. е. 6. 950 400. 7. 194 600 рублей; номеров категории А — 3, номеров категории Б — 52. 8. 12,5. 9. на первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 29 рабочих, зарплата составит 1021 д. е. 10. 5.



Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru

