

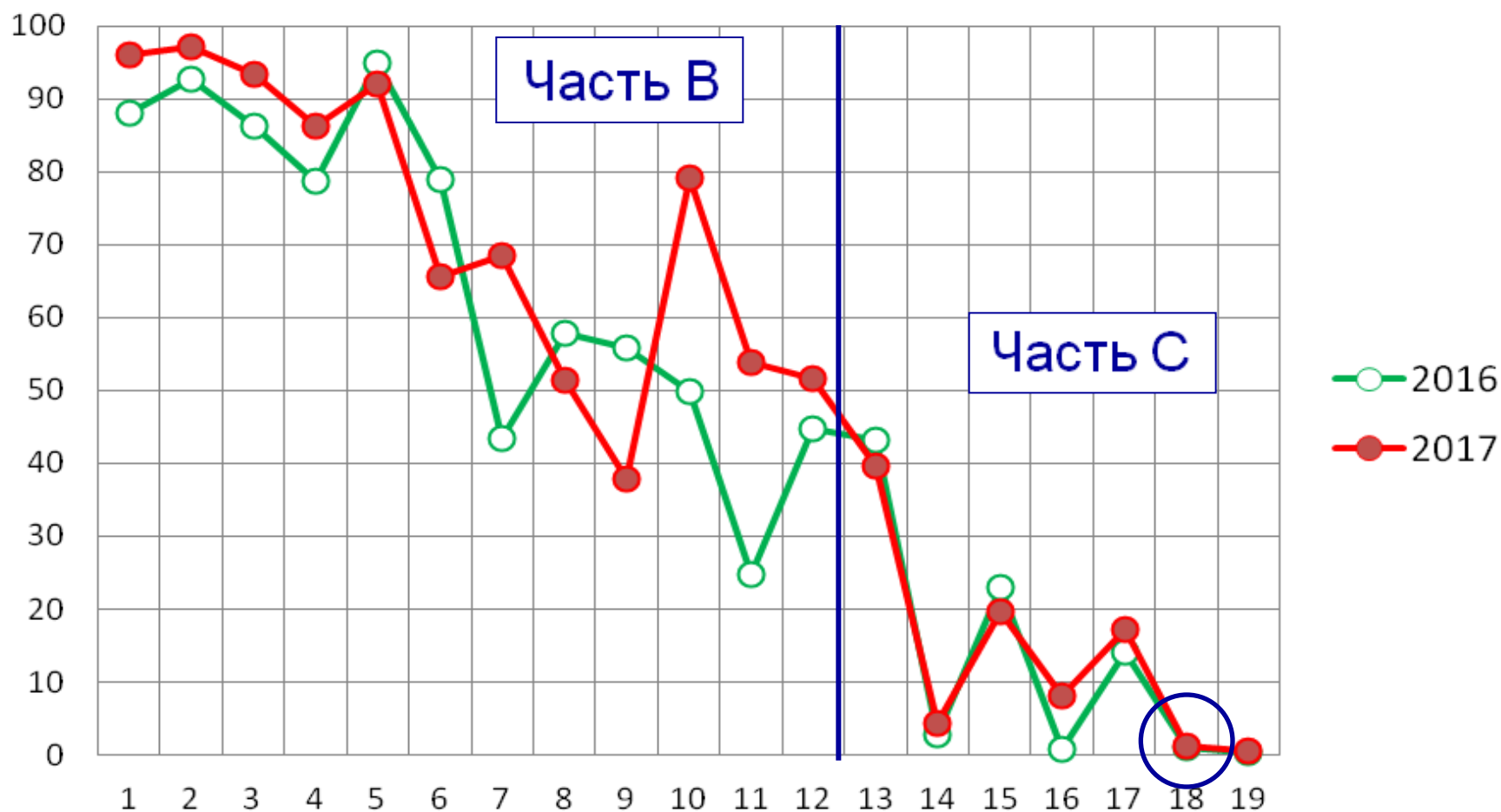
**Рекомендации по подготовке к выполнению
задания №18 (задачи с параметром)
ЕГЭ профильного уровня**



**Прокофьев Александр Александрович,
Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»**

Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.

Сравнение процентов решаемости заданий экзамена
по математике профильного уровня 2016 и 2017 гг.



Характеристика задания 18 ЕГЭ профильный уровень

Спецификация КИМ

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне, в минутах	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне, в минутах
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	–	35 минут

- 2.1. Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.
- 2.2. Решать уравнения, простейшие системы уравнений, **используя свойства функций и их графиков; использовать** для приближенного решения уравнений и неравенств **графический метод**.
- 2.3. Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.
- 5.1. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Что можно ожидать в качестве задания 18 на экзамене?

Задание 18

Тип задания по кодификатору требований

Уравнение, неравенство или система уравнений или неравенств.

Характеристика задания

Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий

Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в её решении как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, чётность и нечётность, требует умения находить область определения, множество значений и строить графики основных элементарных функций.



Критерии проверки задания №18

Как правило критерии пишутся под определенную задачу.
Содержание может быть следующим.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения (исключено одно-два верных значения); – или решение недостаточно обосновано.	3
С помощью верных рассуждений получен верный ответ для одной возможной в задаче ситуации	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения фигур на плоскости (прямых, окружностей и др.); – или совокупности уравнений (неравенств) с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Пример решения задания 18 из демоверсии ЕГЭ 2018 (профильный уровень)

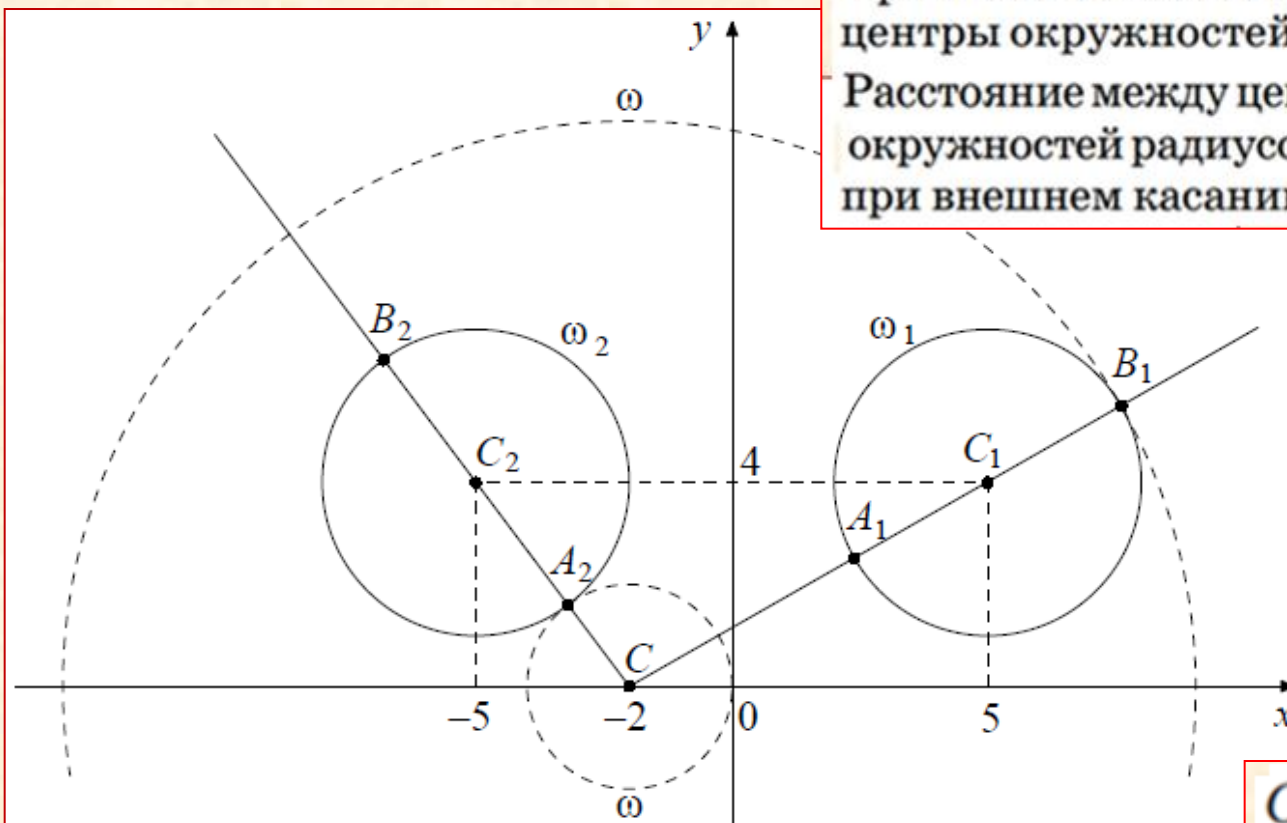
1

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

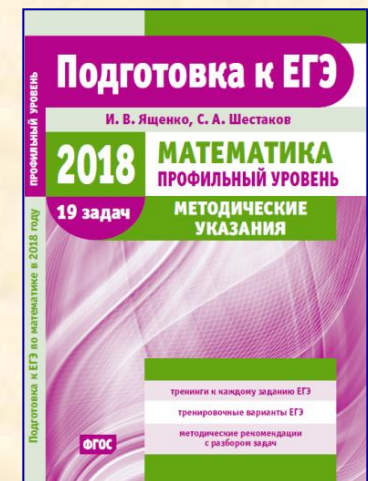
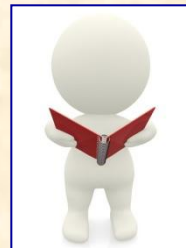
Основу решения составляет теорема о касающихся окружностях.

При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.



Ответ: $2; \sqrt{65} + 3$.

Создано разработчиками ЕГЭ



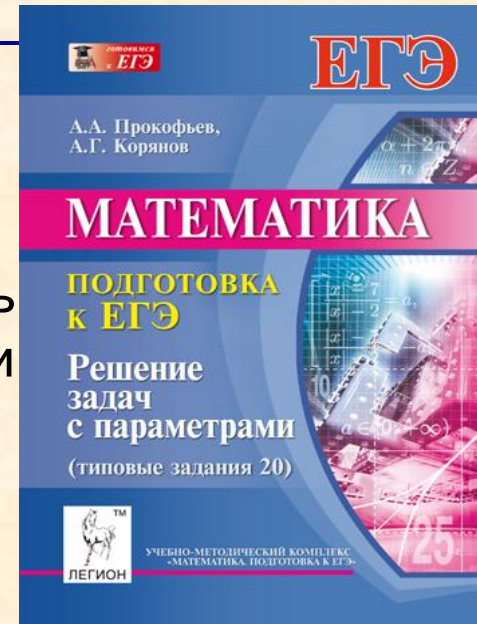
Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел
 $14 - 20 - 36 - 50$?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. издательства Легион по заданию 18



Оглавление

§ 1. Алгебраические методы решения	8
§ 2. Функциональные методы решения	84
(1) Область определения функции; (2) непрерывность функции; (3) дифференцируемость функции; (4) нули функции; (5) промежутки знакопостоянства функции; (6) чётность, нечётность функции; (7) периодичность функции; (8) монотонность функции; 9) экстремум функции; (10) наибольшее (наименьшее) значение функции; (11) ограниченность функции; (12) множество значений функции; (13) график функции.	
§ 3. Функционально-графические методы решения	154
Координатные плоскости Oxy , Oxz и $Oxyz$.	
§ 4. Геометрические методы решения.. . . .	195
(1) Формула расстояния между точками; (2) Уравнения: – прямой; – параболы; – гиперболы; – окружности; – параллелограмма.	
§ 5. Решение задач разными способами.	242



Содержание курса для учителей

Курс для учителей

**«Задачи с параметрами. Технология подготовки учащихся к
ОГЭ и ЕГЭ 2015»**

<http://alexlarin.com/viewtopic.php?p=138669#p138669> (5 презентаций)

№	Тема занятий
1	Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.

Алгебраический метод

Как правило, к алгебраическим методам относят методы решения уравнений, неравенств и систем с параметром при всех допустимых значениях параметра, основанные на алгебраических преобразованиях (равносильные переходы, замены, использование необходимых и достаточных условий) и применении формул и приемов для решения простейших уравнений (линейных, дробно-рациональных, квадратичных, показательных, логарифмических, тригонометрических).



Алгебраический метод

(теоремы о корнях квадратного трехчлена)

1. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (*) не имеет решений тогда и только тогда, когда $D < 0$, где $D = b^2 - 4ac$.

2. Квадратное уравнение (*) имеет:

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$;

б) два корня (могут быть кратными) тогда и только тогда, когда $D \geq 0$;

в) два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} > 0; \end{cases}$$

г) два отрицательных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} < 0; \end{cases}$$

д) корни разных знаков тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow a \cdot f(a) < 0;$$

е) корень, равный нулю, тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0;$$

ж) два разных корня $x_1 > M, x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B > M; \end{cases}$$

з) два разных корня $x_1 < M, x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B < M; \end{cases}$$

и) два корня $x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$;

к) корни $x_1 < m < x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$

д) корни разных знаков тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow a \cdot f(a) < 0;$$

е) корень, равный нулю, тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0;$$

ж) два разных корня $x_1 > M$, $x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B > M; \end{cases}$$

з) два разных корня $x_1 < M$, $x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B < M; \end{cases}$$

и) два корня $x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$;

к) корни $x_1 < m < x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$

л) корни $m < x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$

м) корни $x_1 < m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$

н) один корень внутри интервала $(m; M)$, а другой расположен вне этого интервала тогда и только тогда, когда

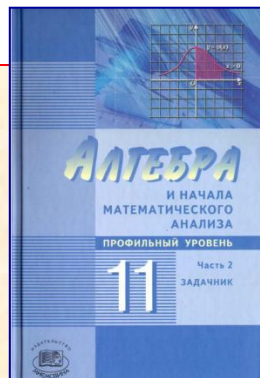
$$f(m) \cdot f(M) < 0.$$



●13.46. При каких значениях параметра a неравенство:

а) $9^x - 4(a - 1) \cdot 3^x + a > 1$ выполняется для любого значения x ?

б) $4^x - (a - 3) \cdot 2^{x+1} + 2a + 2 < 0$ не имеет решений?



Ответ: а) $1 < a < 5/4$;
б) $-1 \leq a \leq 7$.

Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена



(ЕГЭ 2010, аналог С5). Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение.

Пусть $t = 6^x$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Так как дискриминант полученного уравнения

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

положительный, то оно имеет два различных корня $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причем при всех значениях a верно неравенство

$$4a - 2 < 4a + 7.$$

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a - 2$ и $4a + 7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0, \\ 4a - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < a \leq \frac{1}{2}.$$



Ответ: $-1,75 < a \leq 0,5$.



Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $4^x - (5a - 3) \cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$?

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать:
*при каких значениях a имеет один положительный корень
квадратное уравнение $t^2 - (5a - 3)t + 4a^2 - 3a = 0$?*

Числа $t_1 = a$, $t_2 = 4a - 3$ – корни квадратного уравнения

Возможны следующие случаи.

- 1) $\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 4a - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{3}{4}.$
- 2) $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4a - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Нет решений.}$
- 3) $\begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4a - 3 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$
- 4) $\begin{cases} t_1 t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 3a = 0 \\ 5a - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$

Ответ: $0 < a \leq \frac{3}{4}; a = 1.$

Алгебраический метод

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

Решение аналогичного примера участником экзамена.

18. $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$ ~~$\begin{cases} x^4 - x^2 + a^2 \geq 0 \\ x^2 + x - a \geq 0 \end{cases} \quad (1)$~~

$$x^4 - (x^2 - a^2) = (x^2 + (x - a))^2$$

$$x^4 - (x - a)(x + a) = x^4 + 2x^2(x - a) + (x - a)^2$$

$$+ (x - a)(x + a) + 2x^2(x - a) + (x - a)^2 = 0$$

$$(x - a)(x + a + 2x^2 + x - a) = 0$$

$$(x - a)x(x + 1) = 0$$

3 различных решения: $\begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ когда $a \neq 0, a \neq -1$

При этом все корни должны удовлетворять системе (1)

$x = a$: ~~$\begin{cases} a^4 - a^2 + a^2 \geq 0 \\ a^2 + a - a \geq 0 \end{cases}$~~ $x = 0$: ~~$\begin{cases} a^2 \geq 0 \\ -a \geq 0 \end{cases}$~~ $x = -1$: ~~$\begin{cases} 1 - 1 + a^2 \geq 0 \\ 1 - 1 - a \geq 0 \end{cases}$~~

то есть $a \leq 0, a \neq 0, a \neq -1$. $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

Функциональный метод

Функциональный метод решения уравнений и неравенств (в том числе и с параметрами) является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике.

Рассмотрение функционального метода в программе средней школы на базовом уровне носит эпизодический характер.

Наиболее часто используются следующие свойства функций:

- свойства ограниченности области определения или области значения функции (в частности, *методы оценки и минимакса*);
- свойства четности и нечетности входящих в уравнение или неравенство функций;
- кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций входящих в уравнение или неравенство (в частности, на этом основан *метод рационализации*);
- периодичность функций и др..

В отличие от графического метода, знание этих свойств функций позволяет находить точные корни уравнения без построения графиков функций.

ЕГЭ профильный уровень (кодификатор)

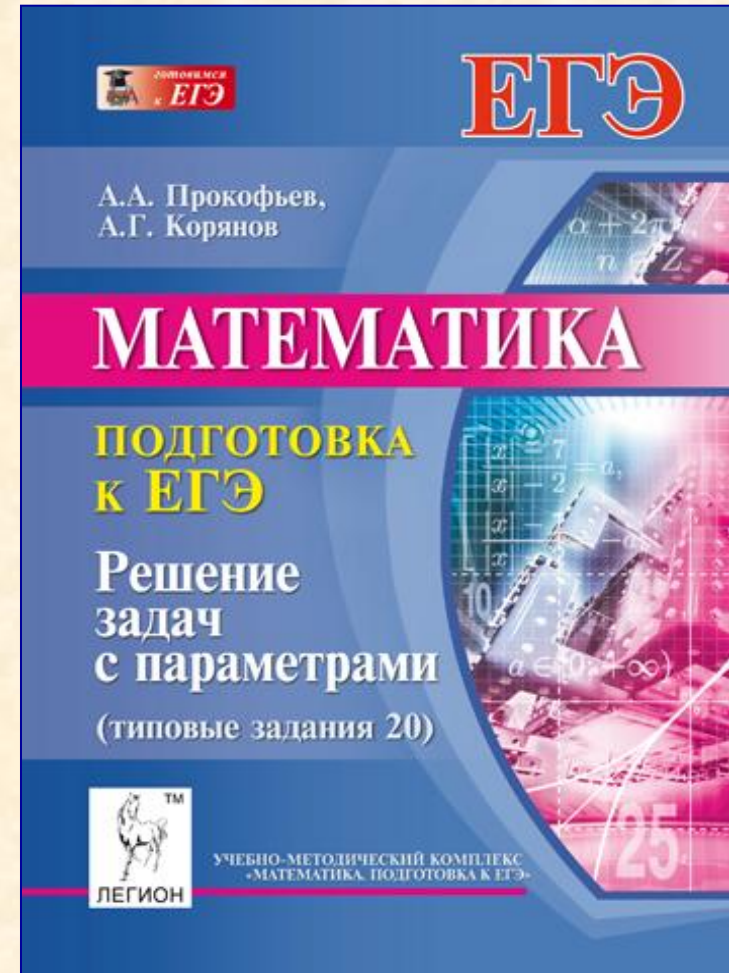
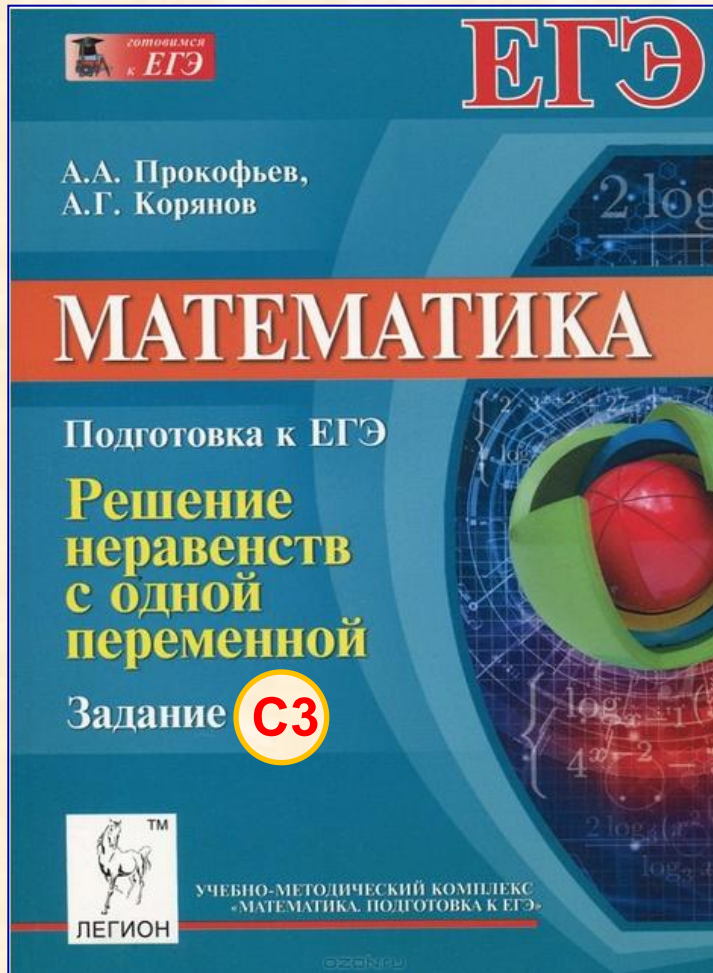


		<i>Определение и график функции</i>
3.1.1		Функция, область определения функции
3.1.2		Множество значений функции
3.2		<i>Элементарное исследование функций</i>
	3.2.1	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
	3.2.2	Чётность и нечётность функции
	3.2.3	Периодичность функции
	3.2.4	Ограниченность функции
	3.2.5	Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции
	3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции
3.3		<i>Основные элементарные функции</i>
	3.3.1	Линейная функция, её график
	3.3.2	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график
	3.3.3	Квадратичная функция, её график
	3.3.4	Степенная функция с натуральным показателем, её график
	3.3.5	Тригонометрические функции, их графики
	3.3.6	Показательная функция, её график
	3.3.7	Логарифмическая функция, её график

Классификация задач, решаемых функциональными методами

1. **К первому типу** отнесем задачи, в условии которых непосредственно требуется исследовать свойства функции $y = f(x, a)$ (область определения, монотонность и т.д.) в зависимости от значений параметра a , принимающего допустимые числовые значения.
2. **Ко второму типу** задач отнесем такие, в которых формулировки свойств функции в точке или на промежутке позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции. Например, исследовать на монотонность функцию $y = x^2 - 5x + 6$ на промежутке $[t; t+2]$ при всех значениях t .
3. **Третий тип** задач связан с постановкой дополнительных условий на свойства функции (количество нулей функции, ограничение на наибольшее значение функции и т.д.).
4. Решение задач **четвертого типа** опирается на определение свойства функции (непрерывность, дифференцируемость, экстремум, ...). Подобные задачи можно переформулировать и свести к уравнению, неравенству или системе уравнений (неравенств), для решения которых используют аналитический или функционально-графический способы (графическую интерпретацию).

О функциональном методе решения уравнений и неравенств



Область значений функции

Полезно знать и уметь находить область значений функций на все области определения и на отрезке.

1

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \geq \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ при } a > 0;$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \geq f(x_0) \text{ при } a > 0, \text{ где } x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Пример 17. (ЕГЭ-2010, вторая волна.) Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-8; 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-2 < a < 5$.

(ЕГЭ 2012, С5) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{0\}$.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty), \quad f(x) \geq 2 \text{ при } x > 0;$$

2

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} = \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ax}} \right) \geq 2\sqrt{ab}, \quad a, b > 0.$$

Найти все значения параметра a , при которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0. \end{cases}$$

Ответ. $a = 2, a = 4$.

При каждом значении параметра a найдите количество решений уравнения

$$16x^4 - 32x^3 + ax^2 - 8x + 1 = 0.$$

3

$$f(x) = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad -\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2};$$

4

$$f(x) = \log_a(g^2(x) + b) \geq \log_a b, \quad a > 1, \quad b > 0;$$

5

$$f(x) = a^{g^2(x)+b} \geq a^b, \quad a > 1.$$

Использование ограниченности функции

Метод оценки (минимаксные задачи)

Идея *метода минимаксов*.

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на $D(f) \cap D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \geq A$, $g(x) \leq A$ и требуется решить уравнение $f(x) = g(x)$. Тогда
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

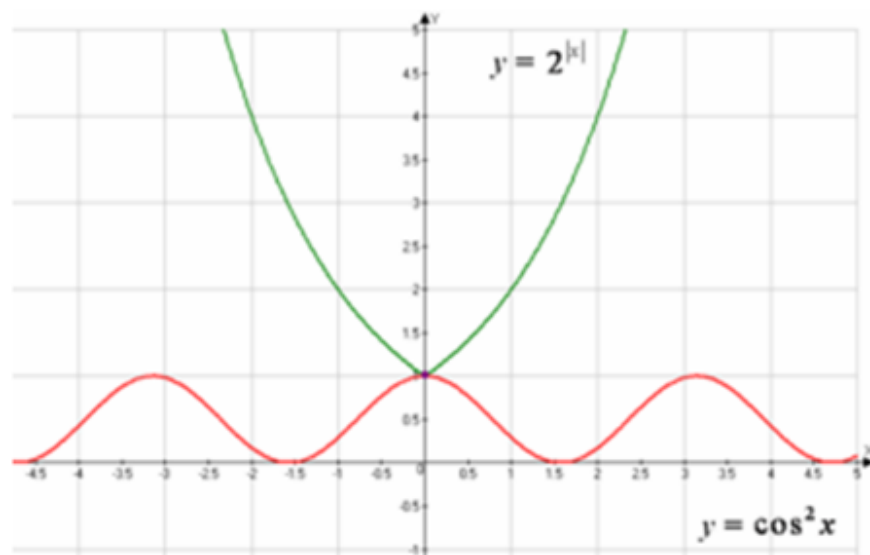
Иначе говоря, уравнение $f(x) = g(x)$ можно переписать в виде $\min f(x) = \max g(x)$, то есть нужно найти такие значения x , чтобы они одновременно являлись точками минимума для функции $f(x)$ и точками максимума для функции $g(x)$.

Поэтому подобные уравнения называют «минимаксными задачами». Наиболее часто этот метод можно применить в случаях, когда функции, стоящие в левой и правой частях уравнения – разного типа (степенная и логарифмическая, степенная и тригонометрическая и т.д.)

Функциональный метод

Метод оценки (минимаксные задачи)

Пример. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x$.



Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

При всех значениях x верны неравенства $2^{|x|} \geq 1$ и $\cos^2 x \leq 1$.

Следовательно,

$$2^{|x|} = \cos^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное равенство.

Значит, $x = 0$ корень уравнения.

Ответ. 0.

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ. $[-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]$.

Четность, нечетность функции

Пример (ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$ имеет единственный корень.

Решение. Если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, т.е. $x_0 = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(a+7)^2 = 2|a+7| \Leftrightarrow |a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a+7| = 0$, то есть $a = -7$, либо $|a+7| = 2$, то есть $a = -5$ или $a = -9$.

При $a = -7$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Его корнями являются числа -2 ; 0 и 2 , т.е. исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -5$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ уравнение принимает вид $x^2 + 2x + 4 = 0$ и не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ уравнение принимает вид $x^2 - 2x + 4 = 0$ и не имеет корней.

Следовательно, при $a = -5$ и при $a = -9$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ. -9 ; -5 .

Функциональный метод (монотонность функции)

**Пример
из
пособия**

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

Обозначим $y = x^2 - 5x + 4a$. Тогда $x^2 = y + 5x - 4a$.

В новых обозначениях уравнение примет вид

$$64^{x+a} = y + 5x - 4a - 8x + a + 4^y, \text{ откуда } 3x + 3a + 4^{3x+3a} = y + 4^y.$$

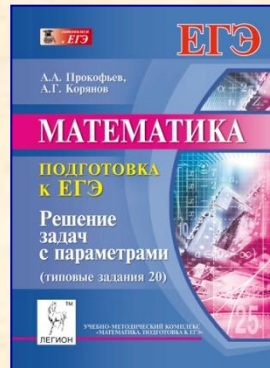
Рассмотрим функцию $f(t) = t + 4^t$. В этом случае последнее уравнение примет вид $f(3x + 3a) = f(y)$.

Функция $f(t) = t + 4^t$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций). Тогда уравнение $f(3x + 3a) = f(y)$ равносильно уравнению $3x + 3a = y$. Выполнив обратную замену, получим

$$3x + 3a = x^2 - 5x + 4a, \text{ откуда } x^2 - 8x + a = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $8^2 - 4a < 0$, то есть при $a > 16$.

Ответ. $a > 16$.



О функционально-графическом методе решения задач с параметрами

В задачах (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств)

вида $F(x, a) \vee 0$ или $f(x, a) \vee g(x, a)$ или
$$\begin{cases} F_1(x, y, a) \vee 0, \\ F_2(x, y, a) \vee 0, \end{cases} \quad (1)$$

где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=, >, <, \geq, \leq$, часто ставится вопрос исследовать (1) на: – наличие решений или их отсутствие, – единственность решения или наличие определенного количества решений, – наличие решений определенного типа и т.д.

Для решения подобных задачи можно применять графический метод решения (*метод наглядной графической интерпретации*), основанный на использовании графических образов, входящих в (1) выражений.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Статья. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. «Математика в школе», – М.: «Школьная пресса», 2011. №1. – С. 18-26, 2011. №2. – С. 25-32.

О функционально-графических методах решения задач с параметрами

Графический метод применительно к рассматриваемым задачам допускает несколько интерпретаций, имеющих общее название **метод сечений**. В зависимости от того, какая роль отводится параметру при решении задачи с параметрами с использованием этого метода можно выделить два основных графических приема.

- Построение графического образа на координатной плоскости **Oxy**. В этом случае (1) приводится, если это возможно, к виду

$$f_1(x) \vee g_1(x, a) \text{ или } \begin{cases} F(x, y) \vee 0, \\ G(x, y, a) \vee 0. \end{cases}$$

- построение графического образа на координатной плоскости **Oxa**. В этом случае (1) приводится, если это возможно, к виду

$$f_2(x) \vee a.$$

Статья. Прокофьев А.А., Соколова Т.В. Обоснование применения графических методов решения задач с параметрами. «Математика в школе», – М.: «Школьная пресса», 2014, № 6. – С. 21-28; 2014, № 7. – С. 30-36.

Часто используемые семейства функций

Рассмотрим часто встречающиеся в подобных задачах семейства функций $y_a(x) = g(x, a)$ или уравнения $G(x, y, a) = 0$ и их графики.

1. Семейство линейных функций $g(x, a) = a(x - x_0) + y_0$, графики которых - прямые, проходящие через точку (x_0, y_0) и имеющие угловой коэффициент, равный a («**пучок прямых**» – так обычно называют это семейство графиков).

2. Семейство функций $g(x, a) = k |x - x_0(a)| + y_0(a)$, графики которых получаются из графика $y = k |x|$ параллельным переносом на вектор $\{x_0(a), y_0(a)\}$ (семейство «**уголков**»).

3. **Семейство окружностей** $(x - x_0(a))^2 + (y - y_0(a))^2 = (r(a))^2$ с центром в точке $(x_0(a), y_0(a))$, радиуса $|r(a)|$.

При решении уравнения (неравенства) вида $f(x) \vee a$ на плоскости Ox строятся график функции $f(x)$ (назовем его «**неподвижным**») и прямые $a = \text{const}$ параллельные оси Ox . Далее в соответствии с условием задачи исследуется расположение построенных графиков.

Соответствие формул и геометрических образов

ЕГЭ прошлых лет

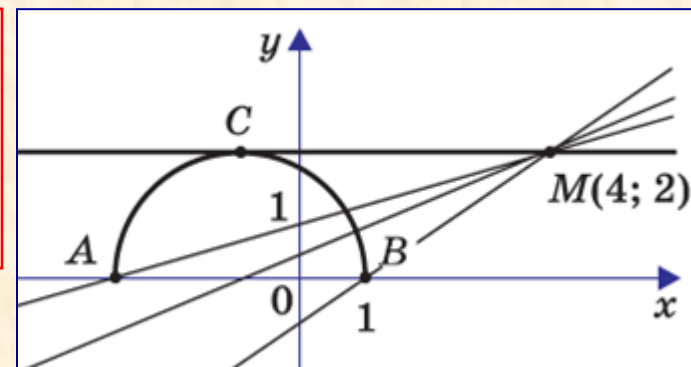
Пример. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

$$y = -a(x - 4) + 2$$

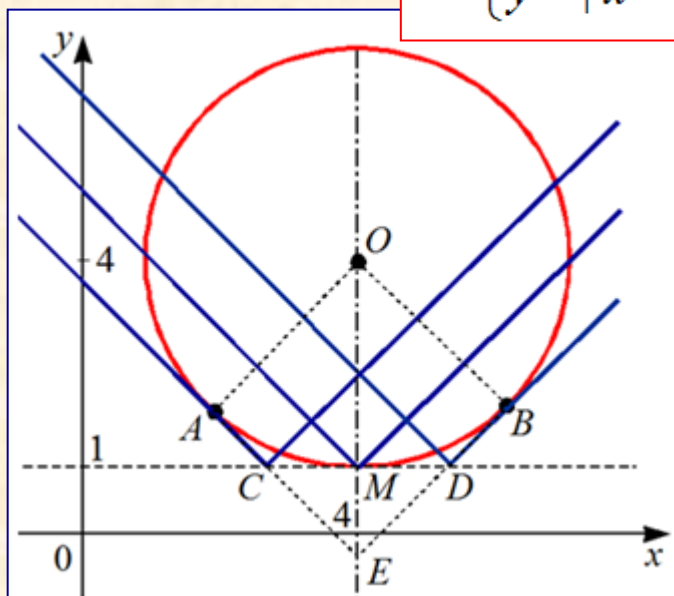
Уравнение «пучка» прямых, проходящих через точку $(4; 2)$.



ЕГЭ, 2011. Найти все значения a , при каждом которых система

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.



Ответ: $7 - 3\sqrt{2}$, 4 и $1 + 3\sqrt{2}$.

Плюсы и минусы графических методов в сравнении с аналитическими методами



Применение графических методов оправдано в случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Плюсы графических методов:

➤ во-первых, построив графический образ, можно определить, как влияет на

них и, соответственно, на решение изменение параметра;

- во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи;
- в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве решений, об их границах и т.д.

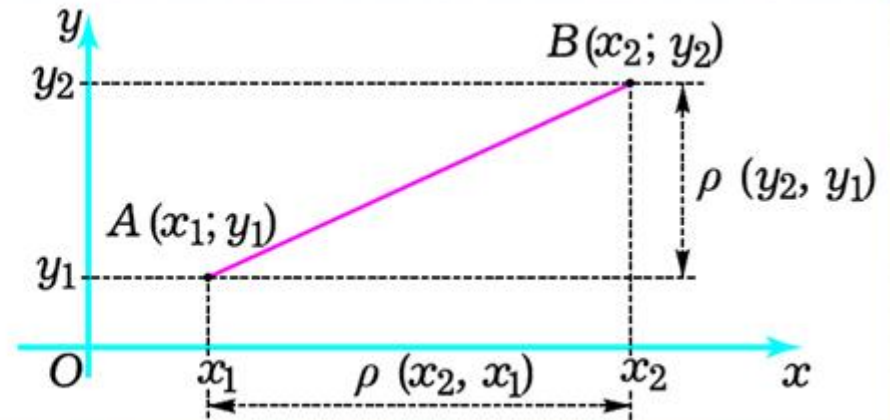
Минусы графических методов: при использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Требования к строгости должны определяться здравым смыслом. Если результат, полученный графическим методом, вызывает сомнения, его необходимо подкрепить аналитически.

Геометрический метод

Требуется знание соответствия формул и геометрических образов, и величин (формулы расстояний между точками на прямой и на плоскости).

Определение . Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости (см. рис.) определяется равенством

$$\rho(A, B) = \sqrt{\rho(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Пример. Найти все положительные значения a , при каждом из которых система

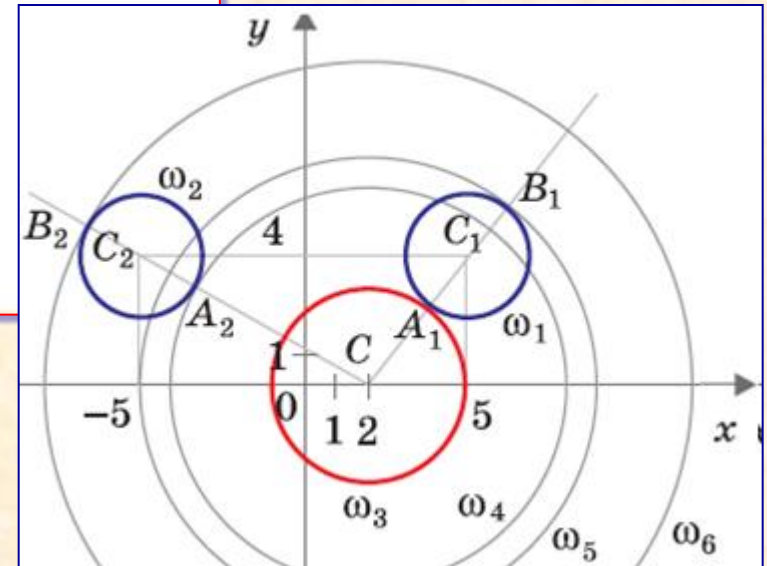
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$CC_1 = 5, CC_2 = \sqrt{65},$$

$$3 < \sqrt{65} - 2 < 7 < \sqrt{65} + 2.$$

Ответ: $a = 3, a = \sqrt{65} + 2.$



Геометрический метод

Уравнение отрезка в радикалах

Дадим геометрическую интерпретацию следующему уравнению:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – заданные числа, $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ одновременно.

Пример 5. Найти все значения a , при которых система уравнений

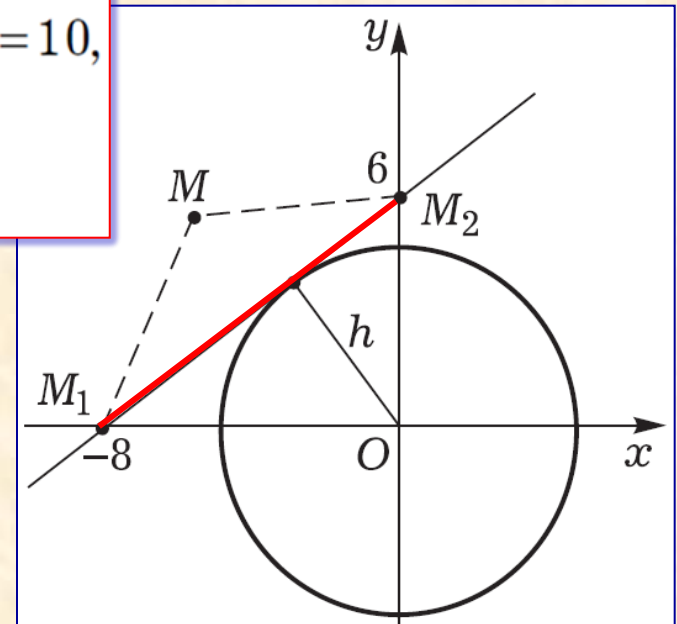
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 + 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 - 12y} = 10, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x + 8)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} = 10.$$

Ответ. $-8 \leq a < -6$, $a = -\frac{24}{5}$, $a = \frac{24}{5}$, $6 < a \leq 8$.



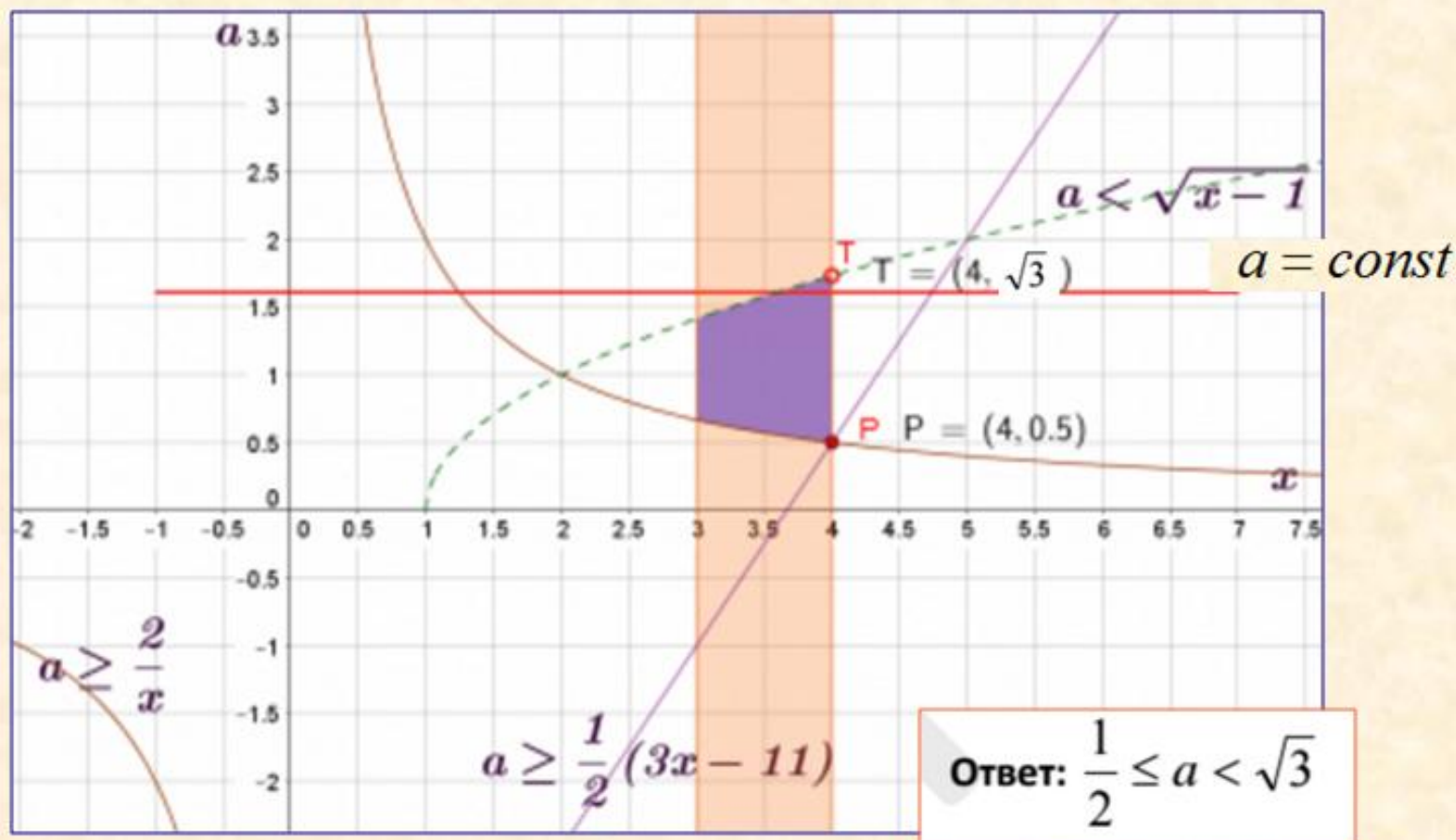
Метод областей

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;4]$

ЕГЭ 2017



(ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a , при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$.

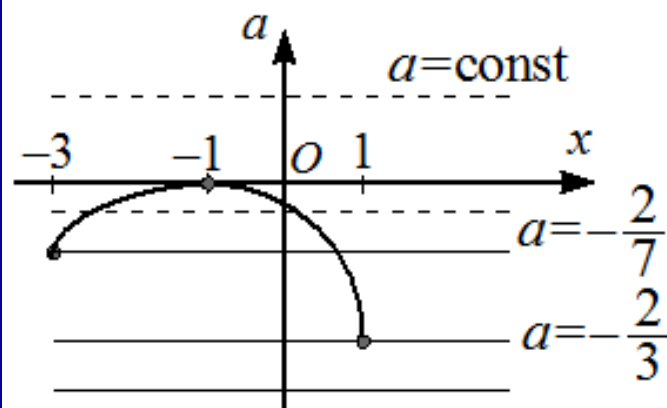
Решение. Так как $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2x - x^2} - 2 = a(4 - x)$ и при $x = 4$ подкоренное выражение отрицательно $3 - 2 \cdot 4 - 4^2 < 0$, то можно записать $a = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2} - 2}{4 - x}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2} - 2}{4 - x}$, $D(f) = [-3; 1]$. Функция непрерывна на $D(f)$. Найдём её производную $f'(x) = \frac{-1 - 5x - 2\sqrt{3 - 2x - x^2}}{2\sqrt{3 - 2x - x^2} \cdot (4 - x)^2}$.

Из уравнения $-1 - 5x - 2\sqrt{3 - 2x - x^2} = 0$ получаем $x = -1$.

$-3 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$
$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$

$$f(-3) = -\frac{2}{7}, f(-1) = 0, f(1) = -\frac{2}{3}.$$



Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые $a = \text{const}$. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции $f(x)$ в одной точке.

Ответ: $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

Комбинированный метод

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x-2)(y+2x-4) = |x-2|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

ЕГЭ 2016

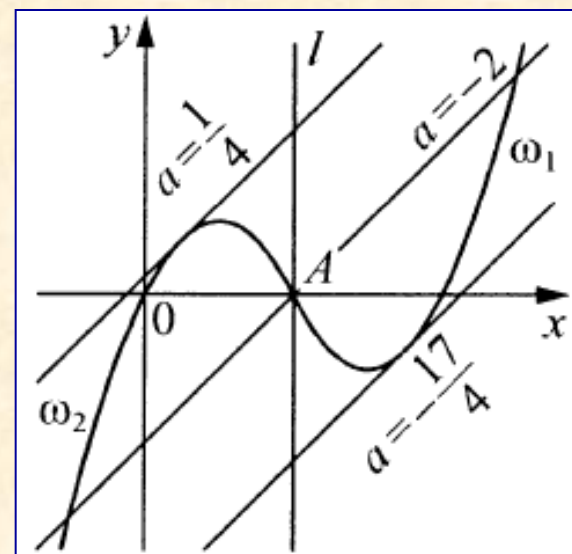
Рассмотрим первое уравнение системы.

Рассмотрим три случая.

1) Если $x > 2$, то получаем уравнение $y = x^2 - 6x + 8$.

2) Если $x = 2$, то координаты любой точки прямой $x = 2$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x < 2$, то получаем уравнение $y = -x^2 + 2x$.



Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m , параллельную прямой $y = x$ или совпадающую с ней.

При $a = -\frac{17}{4}$ и $a = \frac{1}{4}$ прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2 соответственно.

Ответ: $-\frac{17}{4} < a < -2$; $-2 < a < \frac{1}{4}$.

Задание №18 ЕГЭ 2017 (профильный уровень)

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1} \cdot \ln(x^2 - 2x + 2 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$(1) \begin{cases} 4x-1=0, \\ x^2-2x+2-a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/4, \\ a^2 < (25/16)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/4, \\ -5/4 < a < 5/4. \end{cases}$$

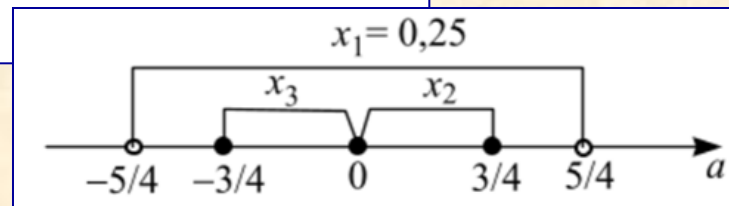
и

$$(2) \begin{cases} x^2-2x+2-a^2=1, \\ 4x-1 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=a^2, \\ x \geq 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-a, \\ x=1+a, \\ x \geq 1/4. \end{cases}$$

Так как интересуют корни на $[0; 1]$, то $1/4 \leq 1-a \leq 1$, $0 \leq a \leq 3/4$ и $1/4 \leq 1+a \leq 1$, $-3/4 \leq a \leq 0$.

Имеем $x_1=1/4$ при $-5/4 < a < 5/4$, $x_2=1-a$ при $0 \leq a \leq 3/4$, $x_3=1+a$ при $-3/4 \leq a \leq 0$; $x_1=x_2$ при $a=3/4$, $x_1=x_3$ при $a=-3/4$, $x_2=x_3=1$ при $a=0$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.



Задание №18 (тренировочная работа)

18

Найдите все целые отрицательные значения параметра a , при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство

$$20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2| \quad (*)$$

не выполнено.

Найдём все a , при каждом из которых неравенство

$20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ выполнено при любом $b > a$.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 20b - 6|2a + b| - 2|b - 2| + |2a - b| + 5|4a^2 - b + 2| \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть $20a^2 + 15a - 17|a| - 2|a - 2| + 10 \geq 0$.

Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$10a^2 + 17a + 3 \geq 0; \quad \begin{cases} -0,2 \leq a < 0; \\ a \leq -1,5. \end{cases}$$

при $a \geq 0$
верно

Существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $(*)$ не выполнено.

Ответ: -1 .

Подготовительные задания 18

Подготовительные задания

- 1 При каждом значении параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2 \sin x + 3}{\cos y} = a, \\ \frac{\cos y}{2 \sin x + 3} = 2a - 1. \end{cases}$$

- 2 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + a = 3$ имеет более одного корня.
- 3 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$ имеет хотя бы один корень.
- 4 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.
- 5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.
- 6 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x + 2|x - 3| - 3|x - a - 4| = 7|x - a|$ имеет хотя бы один корень.



- 7 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4(x + y), \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = a^2. \end{cases}$$

- 8 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $7x + 3|x + a| - 2|x - 3| \geq 6$ выполняется для любого значения $x \in [0; 7]$.

- 9 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых число 9 является решением неравенства

$$(x - 9)(x - 16)\sqrt{a^2 - 8a \log_8(x - 8) - 9} \geq 0,$$

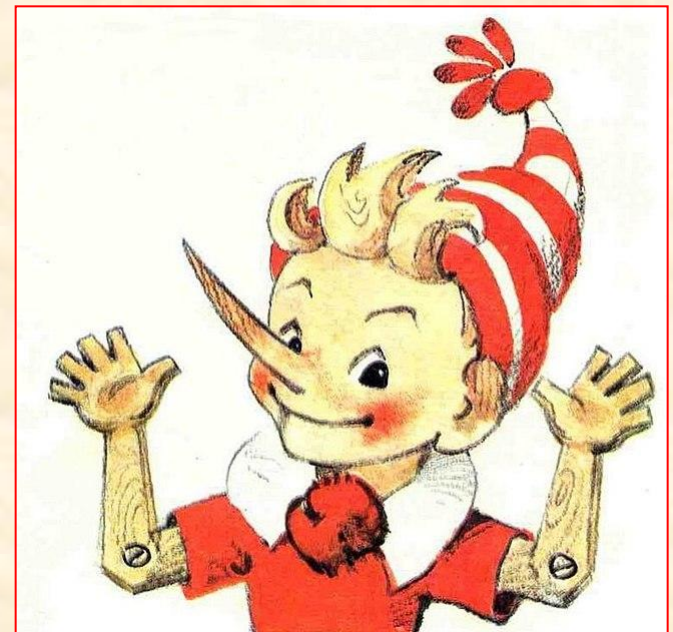
а число 16 не является решением этого неравенства.

- 10 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a + 1) \cos x - 4a - 11 = 0$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

Ответы к подготовительным заданиям 18

Задача 18. Подготовительные задания

1. Если $a = 1$, то $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; при прочих a решений нет. 2. $a \in (-1; 0) \cup (0; 4)$. 3. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{8}\right]$. 4. $a \in [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$. 5. $a = 0$; $a = \pm 4$. 6. $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$. 7. $a = \pm(\sqrt{5} - 2)$; $a = \pm(\sqrt{5} + 2)$. 8. $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. 9. $a \in [3; 9)$. 10. Если $a \in [-4; -2]$, то $x = \pm \arccos(a + 3) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при прочих a корней нет.



Зачетные задания 18

Зачётные задания

- 1 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2 - 4)^2 + y^2 + 8, \\ |y| z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0. \end{cases}$$

- 2 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.
- 3 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leq \log_2 (x + 2)$ является и решением неравенства $49x^2 \leq 4a^4$.
- 4 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x - a} = x - 2a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .
- 5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение.

- 6 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$ выполнено при любом значении x .
- 7 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x + a - 6)^2 + (y - a)^2 = 18, \\ \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} + \sqrt{(x - 6)^2 + y^2} = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

- 8 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.
- 9 Найдите все значения x , для каждого из которых равенство $2 \log_2(4 - \sqrt{7 + 2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4 - 3x)$ выполняется при любом значении параметра a .
- 10 Найдите все значения параметра b , для каждого из которых при любом значении параметра a имеет ровно два различных решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0. \end{cases}$$

Ответы к зачетным заданиям 18

Зачётные задания

1. $a = -2$. 2. $a \in [-2; -0,5]$. 3. $a \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$. 4. Если $a > 0$, то $x = 2a + 1 + \sqrt{3a + 1}$; если $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$, то $x = 2a + 1 \pm \sqrt{3a + 1}$; при прочих a корней нет. 5. a — любое иррациональное число. 6. $a \in [1; +\infty)$. 7. $a = 3$. 8. $a = 0$; $a = 2 \sin 1$. 9. $x = 1$. 10. $b \in (-4; -1)$.



18

Задание №18 ЕГЭ 2017 (профильный уровень)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{4x^2 - (4a+2)x + 2a} \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; 1].$$

Ответ: $a < 0$; $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0 \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; 3].$$

Ответ: $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}$; $\frac{11}{2} \leq a < \frac{23}{4}$.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; \pi].$$

Ответ: $a < 0$; $\frac{\pi}{4} \leq a \leq \pi$.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \ln(x+a) = \ln(x+a) \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [0; 1].$$

Ответ: $-\frac{1}{4} < a < 0$; $a = \frac{1}{2}$; $a = \frac{3}{4}$; $a > 1$.

Задание №18 ЕГЭ 2017 (профильный уровень)

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение на отрезке } [3; 4].$$

Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ x^2 + 16a \leq 8x + 48 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение на отрезке } [0; 1].$$

Ответ: $-4 < a < 8\sqrt{2} - 8$.

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0 \quad \text{имеет ровно один корень на отрезке } [4; 8].$$

Ответ: $\frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < -3$; $a = -\frac{5}{2}$; $-2 < a \leq 1$.

Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru

